SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1
Ricordando lo sviluppo di McLaurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = -2x^2$, e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = x^4$, si ottiene

$$\mathrm{e}^{-2x^2} \sim 1 - 2x^2 + \frac{(-2x^2)^2}{2} \qquad \text{e} \qquad \log(1+x^4) \sim x^4\,,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-2x^2} - 1 + 2x^2}{\log(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x^2 + 2x^4 - 1 + 2x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4} = 2\,.$$

Tenendo, invece, conto degli ordini di infinito, si ricava

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x^2} - 1 + 2x^2}{\log(1+x^4)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{\log x^4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{4\log x} = +\infty\,.$$

Esercizio 2
Derivando la funzione proposta, si ottiene

$$f'(x) = \frac{1}{2x} - 8x - 3 = -\frac{16x^2 + 6x - 1}{2x}\,.$$

Risolvendo la corrispondente equazione di secondo grado e ricordando che $x > 0$, ricaviamo

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } 0 < x < 1/8; \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = 1/8; \qquad f'(x) < 0 \quad \text{per } x > 1/8.$$

Pertanto, $x = 1/8$ è punto di massimo assoluto.

Esercizio 3
Scrivendo in forma algebrica $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ricava

$$\mathrm{e}^{3z+i} = \mathrm{e}^{3a+i(3b+1)} = \mathrm{e}^{3a} \cdot \mathrm{e}^{i(3b+1)} = 1 \cdot \mathrm{e}^{i1}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{3a} = 1 \\ 3b + 1 = 1 + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 3a = 0 \\ 3b = 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 2k\pi/3 \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,.$$

Imponendo la condizione $b \in (0, 3)$ si ottiene $k = 1$ e, quindi, l'unica soluzione $z = 2\pi i/3$.

Domanda 1
La risposta $a)$ è falsa, in quanto prendendo $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{\log n}}$, tutte le ipotesi sono rispettate, ma $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n \log n}$, che è una serie divergente.
La risposta $b)$ è corretta, poiché per ipotesi le due successioni sono entrambe infinitesime.
La risposta $c)$ è corretta, poiché per ipotesi $a_n^2 b_n < 1/n^2$ e quindi, per il criterio del confronto, $\sum a_n^2 b_n$ converge.
La risposta $d)$ è falsa, in quanto prendendo $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, tutte le ipotesi sono rispettate, ma $n^2 a_n b_n = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Ricordando lo sviluppo di McLaurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 2x^2$, e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = x^4$, si ottiene

$$\log(1+2x^2) \sim 2x^2 - \frac{(2x^2)^2}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{e}^{x^4} \sim 1 + x^4\,,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^2) - 2x^2}{\mathrm{e}^{x^4} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 2x^4 - 2x^2}{1 + x^4 - 1} = \lim_{x\to 0} -\frac{2x^4}{x^4} = -2\,.$$

Tenendo, invece, conto degli ordini di infinito, si ricava

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\log(1+2x^2) - 2x^2}{\mathrm{e}^{x^4} - 1} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{2x^2}{\mathrm{e}^{x^4}} = 0\,.$$

Esercizio 2

Derivando la funzione proposta, si ottiene

$$f'(x) = 3\mathrm{e}^{2x^3+4x^2+2}(6x^2 + 8x) = 6\mathrm{e}^{2x^3+4x^2+2}(3x+4)x\,.$$

Risolvendo la corrispondente equazione di secondo grado, ricaviamo

$f'(x) > 0$ per $x < -4/3$ e $x > 0$; $\quad f'(x) = 0$ per $x = -4/3$ e $x = 0$; $\quad f'(x) < 0$ per $-4/3 < x < 0$.

Pertanto, $x = -4/3$ è punto di massimo relativo e $x = 0$ è punto di minimo relativo.

Esercizio 3

Scrivendo in forma algebrica $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ricava

$$\mathrm{e}^{-3iz+2} = \mathrm{e}^{(2+3b)-i3a} = \mathrm{e}^{(2+3b)} \cdot \mathrm{e}^{-i3a} = \mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{i0}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{2+3b} = \mathrm{e}^2 \\ -3a = 0 + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2 + 3b = 2 \\ a = -2k\pi/3 \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 3b = 0 \\ a = -2k\pi/3 \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,.$$

Imponendo la condizione $a \in (-3, 0)$ si ottiene $k = 1$ e, quindi, l'unica soluzione $z = -2\pi/3$.

Domanda 1

La risposta *a)* è corretta, poiché per ipotesi $nb_n = o(1/\sqrt{n})$ e quindi $nb_n \to 0$.
La risposta *b)* è corretta, poiché per ipotesi per ipotesi $a_n b_n < 3/n^{3/2}$ e quindi, per il criterio del confronto, $\sum a_n b_n$ converge.
La risposta *c)* è falsa, in quanto prendendo $a_n = \frac{1}{n^4}$ e $b_n \equiv 2$, tutte le ipotesi sono rispettate, ma $\lim n^2 a_n b_n = \lim \frac{2}{n^2} = 0$.
La risposta *d)* è falsa, in quanto prendendo $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n \equiv 2$, tutte le ipotesi sono rispettate, ma $\sum n a_n b_n = \sum \frac{2}{n}$, che è una serie divergente.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

Ricordando lo sviluppo di McLaurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = -3x^3$, e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = x^6$, si ottiene

$$\log(1-3x^3) \sim -3x^3 - \frac{(-3x^3)^2}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{e}^{x^6} \sim 1 + x^6\,,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-3x^3)+3x^3}{\mathrm{e}^{x^6}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^3 - 9x^6/2 + 3x^3}{1+x^6-1} = \lim_{x\to 0} -\frac{9x^6/2}{x^6} = -9/2\,.$$

Tenendo, invece, conto degli ordini di infinito, si ricava

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\log(1-3x^3)+3x^3}{\mathrm{e}^{x^6}-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3}{\mathrm{e}^{x^6}} = 0\,.$$

Esercizio 2

Derivando la funzione proposta, si ottiene

$$f'(x) = 4\mathrm{e}^{x^3+5x^2+1}(3x^2+10x) = 4\mathrm{e}^{x^3+5x^2+1}(3x+10)x\,.$$

Risolvendo la corrispondente equazione di secondo grado, ricaviamo

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } x < -10/3 \text{ e } x > 0; \qquad f'(x) < 0 \quad \text{per } -10/3 < x < 0;$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per } x = -10/3 \text{ e } x = 0.$$

Pertanto, $x = -10/3$ è punto di massimo relativo e $x = 0$ è punto di minimo relativo.

Esercizio 3

Scrivendo in forma algebrica $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ricava

$$\mathrm{e}^{-4iz+1} = \mathrm{e}^{(1+4b)-i4a} = \mathrm{e}^{(1+4b)} \cdot \mathrm{e}^{-i4a} = \mathrm{e}^1 \cdot \mathrm{e}^{i0}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{1+4b} = \mathrm{e}^1 \\ -4a = 0 + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1+4b = 1 \\ a = -k\pi/2 \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 4b = 0 \\ a = -k\pi/2 \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,.$$

Imponendo la condizione $a \in (-4, -3)$ si ottiene $k = 2$ e, quindi, l'unica soluzione $z = -\pi$.

Domanda 1

La risposta $a)$ è falsa, in quanto prendendo $b_n = \frac{1}{n}$ e $a_n \equiv 4$, tutte le ipotesi sono rispettate, ma $na_nb_n = 4$, che non è una successione infinitesima.

La risposta $b)$ è corretta, poiché per ipotesi $b_na_n/n < \frac{5}{n^{3/2}}$ e quindi, per il criterio del confronto, $\sum b_na_n/n$ converge.

La risposta $c)$ è falsa, in quanto prendendo $a_n \equiv 4$ e $b_n = \frac{1}{n}$, tutte le ipotesi sono rispettate, ma $na_nb_n = \frac{4n}{n} = 4 \not\to +\infty$.

La risposta $d)$ è corretta, poiché per ipotesi $a_nb_n^4 < 5/n^2$ e quindi, per il criterio del confronto, $\sum a_nb_n^4$ converge.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

Ricordando lo sviluppo di McLaurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = -3x^3$, e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 2x^6$, si ottiene

$$\mathrm{e}^{-3x^3} \sim 1 - 3x^3 + \frac{(-3x^3)^2}{2} \qquad \text{e} \qquad \log(1+2x^6) \sim 2x^6\,,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-3x^3} - 1 + 3x^3}{\log(1+2x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 3x^3 + 9x^6/2 - 1 + 3x^3}{2x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^6/2}{2x^6} = 9/4\,.$$

Tenendo, invece, conto degli ordini di infinito, si ricava

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3x^3} - 1 + 3x^3}{\log(1+2x^6)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{\log 2x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{\log 2 + \log x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{6\log x} = +\infty\,.$$

Esercizio 2

Derivando la funzione proposta, si ottiene

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 4x - 3 = -\frac{4x^2 + 3x - 1}{x}\,.$$

Risolvendo la corrispondente equazione di secondo grado e ricordando che $x > 0$, ricaviamo

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } 0 < x < 1/4; \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = 1/4; \qquad f'(x) < 0 \quad \text{per } x > 1/4.$$

Pertanto, $x = 1/4$ è punto di massimo assoluto.

Esercizio 3

Scrivendo in forma algebrica $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ricava

$$\mathrm{e}^{4z+2i} = \mathrm{e}^{4a+i(4b+2)} = \mathrm{e}^{4a} \cdot \mathrm{e}^{i(4b+2)} = 1 \cdot \mathrm{e}^{i2}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{4a} = 1 \\ 4b + 2 = 2 + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 4a = 0 \\ 4b = 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = k\pi/2 \end{cases} k \in \mathbb{Z}\,.$$

Imponendo la condizione $b \in (3,4)$ si ottiene $k = 2$ e, quindi, l'unica soluzione $z = \pi i$.

Domanda 1

La risposta *a*) è corretta, poiché per ipotesi $a_n b_n < 1/n^2$ e quindi, per il criterio del confronto, $\sum a_n b_n$ converge.

La risposta *b*) è falsa, in quanto prendendo $a_n = \frac{1}{n^3}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, tutte le ipotesi sono rispettate, ma $n^4 a_n b_n = \frac{n^4}{n^4} = 1 \not\to 0$.

La risposta *c*) è corretta, poiché per ipotesi entrambe le successioni $\{a_n\}$ e $\{\sqrt{b_n}\}$ sono infinitesime.

La risposta *d*) è falsa, in quanto prendendo $a_n = \frac{1}{n^3}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, tutte le ipotesi sono rispettate, ma $\sum n^2 a_n b_n = \sum \frac{n^2}{n^4} = \sum \frac{1}{n^2}$ che è una serie convergente.