SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

C.E. $= (-\tan 1, 0) \cup (0, +\infty)$;

$f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\tan 1, 0)$; $\qquad f(x) < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$;

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mp\infty \; ; \qquad \lim_{x\to(-\tan 1)^+} f(x) = 0^+ \; ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{\log(1+\pi/2)} \; ;$$

$$f'(x) = \frac{1}{[\log^2(\arctan x + 1)](\arctan x + 1)(1+x^2)} > 0 \quad \forall x \in (-\tan 1, 0) \cup (0, +\infty) \; ;$$

$$\lim_{x\to(-\tan 1)^+} f'(x) = +\infty \; .$$

Esercizio 2

Poiché l'equazione proposta è fattorizzata, le soluzioni si otterranno risolvendo separatamente le due equazioni

$$z^2 - 2z + 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad z^3 - 3 = 0 \; .$$

Per la prima si ottengono le soluzioni

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] \qquad \text{e} \qquad z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2[\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)] \; .$$

La seconda ha come soluzioni le tre radici cubiche complesse di 3, cioè

$$z_3 = \sqrt[3]{3} \; ; \qquad z_4 = \sqrt[3]{3}[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)] \; ; \qquad z_5 = \sqrt[3]{3}[\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)] \; .$$

Esercizio 3

Ricordando che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
[x - \log(1+x)]^2 \sin x^2 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots\right)^2 \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \dots\right) \\
&= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{3} + o(x^5)\right)\left(x^2 + o(x^5)\right) = \frac{x^6}{4} - \frac{x^7}{3} + o(x^7) \; .
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Osservando che

$$\frac{1}{2} \le 1 + \frac{\cos n}{2} \le \frac{3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < q_1 := \cos\frac{3}{2} \le \cos\left(1 + \frac{\cos n}{2}\right) \le \cos\frac{1}{2} =: q_2 < 1$$

e poiché $q_1^n \to 0^+$ e $q_2^n \to 0^+$, dal "*teorema dei carabinieri*" si ottiene che $\lim_{n\to+\infty} \left[\cos\left(1 + \frac{\cos n}{2}\right)\right]^n = 0^+$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, \tan 1)$;

$f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$; $\qquad f(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \tan 1)$;

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mp\infty \ ; \qquad \lim_{x\to(\tan 1)^-} f(x) = 0^- \ ; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{\log(1+\pi/2)} \ ;$$

$$f'(x) = \frac{1}{[\log^2(1-\arctan x)](1-\arctan x)(1+x^2)} > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \tan 1) \ ;$$

$$\lim_{x\to(\tan 1)^-} f'(x) = +\infty \ .$$

Esercizio 2

Poiché l'equazione proposta è fattorizzata, le soluzioni si otterranno risolvendo separatamente le due equazioni

$$3z^2 - 6z + 12 = 0 \qquad \text{e} \qquad z^3 + 3 = 0 \ .$$

Per la prima si ottengono le soluzioni

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] \qquad \text{e} \qquad z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2[\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)] \ .$$

La seconda ha come soluzioni le tre radici cubiche complesse di -3, cioè

$$z_3 = \sqrt[3]{3}[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] \ ; \qquad z_4 = \sqrt[3]{3}[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] \ ; \qquad z_5 = \sqrt[3]{3}[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)] \ .$$

Esercizio 3

Ricordando che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

si ottiene

$$\begin{aligned}(x-\sin x)^2\cos x &= \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} + \dots\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right) \\ &= \left(\frac{x^6}{36} - \frac{x^8}{3\cdot 5!} + o(x^8)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^6}{36} - \frac{x^8}{60} + o(x^8) \ .\end{aligned}$$

Esercizio 4

Osservando che

$$\frac{1}{2} \le \frac{2+\cos n}{2} \le \frac{3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < q_1 := \cos\frac{3}{2} \le \cos\left(\frac{2+\cos n}{2}\right) \le \cos\frac{1}{2} =: q_2 < 1$$

e poiché $q_1^n \to 0^+$ e $q_2^n \to 0^+$, dal "*teorema dei carabinieri*" si ottiene che $\lim_{n\to+\infty}\left[\cos\left(1+\frac{\cos n}{2}\right)\right]^{-n} = +\infty$.