SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1
Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili, che ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non risolve il problema di Cauchy. Separando le variabili, otteniamo

$$-\int \frac{dy}{y^n} = \int e^{nx}\, dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(n-1)y^{n-1}(x)} = \frac{1}{n}\, e^{nx} + C\,.$$

Esplicitando $y(x)$ ed imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \sqrt[n-1]{\frac{n}{(n-1)(e^{nx}+1)}}\,;$$

pertanto il limite proposto sarà dato da

$$\lim_{n\to+\infty} y^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n-1)(e^2+1)} = \frac{1}{e^2+1}\,.$$

Esercizio 2
Effettuando un cambiamento in coordinate polari piane centrate nell'origine, osserviamo che l'insieme E si trasforma nell'insieme $\widetilde{E} = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi) \;:\; 1 \le \rho \le 3\,,\; \pi/4 \le \theta \le \pi/2\}$ e l'integrale proposto diviene

$$\iint_E \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\, dy = \iint_{\widetilde{E}} \frac{\rho^4 \cos\theta \sin^3\theta}{\rho^3}\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$
$$\left(\int_1^3 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \sin^3\theta\, d\theta\right) = \left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_1^3\right)\left(\frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\right) = \frac{26}{3}\,\frac{3}{16} = \frac{13}{8}\,.$$