SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili, che ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non risolve il problema di Cauchy. Separando le variabili, otteniamo

$$-\int \frac{dy}{y^n} = \int \mathrm{e}^{nx}\, dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(n-1)y^{n-1}(x)} = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{nx} + C\,.$$

Esplicitando $y(x)$ ed imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \sqrt[n-1]{\frac{n}{(n-1)(\mathrm{e}^{nx}+1)}}\,;$$

pertanto il limite proposto sarà dato da

$$\lim_{n\to+\infty} y^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n-1)(\mathrm{e}^2+1)} = \frac{1}{\mathrm{e}^2+1}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che $f \geq 0$, mentre $g \leq 0$. L'area A della regione considerata si determina calcolando

$$A = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx\,.$$

Utilizzando due volte il metodo di integrazione per parti e la simmetria pari di g, si ottiene

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} [(2x^2+3)\mathrm{e}^x - \frac{|x|}{1+x^2}\log\frac{1}{1+x^2}]\, dx = [(2x^2+3-4x+4)\mathrm{e}^x]\Big|_{-1}^{1} + 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)\, dx \\ &= 5\mathrm{e} - 13\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}\log^2(1+x^2)\Big|_0^1 = 5\mathrm{e} - 13\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}\log^2 2\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3

1. Utilizzando un cambiamento in coordinate polari, centrate nel punto $(0,0)$, otteniamo

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy^3 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^4(\cos\theta\sin^3\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta)}{\rho^3} = 0 = f(0,0)$$

indipendentemente da θ. Pertanto, f è continua nell'origine.

2. Poichè la funzione f è identicamente nulla sugli assi cartesiani, si ottiene subito che $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

3. Ponendo $v = (v_1, v_2)$ il generico versore di $\mathbb{R}^2$, dalla definizione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{t^4(v_1v_2^3 - v_1^2v_2^2)}{t^4} = v_1v_2^3 - v_1^2v_2^2\,.$$

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la b), poiché la derivabilità non garantisce né la continuità né la differenziabilità e il gradiente nullo indica solo che siamo in presenza di un punto stazionario.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili, che ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non risolve il problema di Cauchy. Separando le variabili, otteniamo

$$-\int \frac{dy}{y^{n+2}} = \int \mathrm{e}^{2nx}\, dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(n+1)y^{n+1}(x)} = \frac{1}{2n}\,\mathrm{e}^{2nx} + C\,.$$

Esplicitando $y(x)$ ed imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \sqrt[n+1]{\frac{2n}{(n+1)(\mathrm{e}^{2nx}+2)}}\,;$$

pertanto il limite proposto sarà dato da

$$\lim_{n\to+\infty} y^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{(n+1)(\mathrm{e}^2+2)} = \frac{2}{\mathrm{e}^2+2}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che $f \geq 0$, mentre $g \leq 0$. L'area A della regione considerata si determina calcolando

$$A = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx\,.$$

Utilizzando due volte il metodo di integrazione per parti e la simmetria pari di f, si ottiene

$$A = \int_{-1}^{1} [\frac{|x|}{1+x^2}\log(1+x^2) + (4x^2+2)\mathrm{e}^{-x}]\, dx = 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)\, dx - [(4x^2+2+8x+8)\mathrm{e}^{-x}]\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{2}\log^2(1+x^2)\Big|_0^1 + 6\mathrm{e} - 22\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{2}\log^2 2 + 6\mathrm{e} - 22\mathrm{e}^{-1}\,.$$

Esercizio 3

1. Utilizzando un cambiamento in coordinate polari, centrate nel punto $(0,0)$, otteniamo

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4y^2 - xy^5}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^6(\cos^4\theta\sin^2\theta - \cos\theta\sin^5\theta)}{\rho^5} = 0 = f(0,0)$$

indipendentemente da θ. Pertanto, f è continua nell'origine.

2. Poichè la funzione f è identicamente nulla sugli assi cartesiani, si ottiene subito che $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

3. Ponendo $v = (v_1, v_2)$ il generico versore di $\mathbb{R}^2$, dalla definizione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^6(v_1^4v_2^2 - v_1v_2^5)}{t^6} = v_1^4v_2^2 - v_1v_2^5\,.$$

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la a), poiché la derivabilità non garantisce né la continuità né la differenziabilità e il gradiente nullo indica solo che siamo in presenza di un punto stazionario.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili, che ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non risolve il problema di Cauchy. Separando le variabili, otteniamo

$$-\int \frac{dy}{y^{n+2}} = \int \mathrm{e}^{2nx}\, dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(n+1)y^{n+1}(x)} = \frac{1}{2n}\,\mathrm{e}^{2nx} + C\,.$$

Esplicitando $y(x)$ ed imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \sqrt[n+1]{\frac{2n}{(n+1)(\mathrm{e}^{2nx}+4)}}\,;$$

pertanto il limite proposto sarà dato da

$$\lim_{n\to+\infty} y^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{(n+1)(\mathrm{e}^2+4)} = \frac{2}{\mathrm{e}^2+4}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che $f \geq 0$, mentre $g \leq 0$. L'area A della regione considerata si determina calcolando

$$A = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx\,.$$

Utilizzando due volte il metodo di integrazione per parti e la simmetria pari di f, si ottiene

$$A = \int_{-1}^{1} [\frac{|x|}{1+x^2}\log(1+x^2) + (3x^2+1)\mathrm{e}^{-x}]\, dx = 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)\, dx - [(3x^2+1+6x+6)\mathrm{e}^{-x}]\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{2}\log^2(1+x^2)\Big|_0^1 + 4\mathrm{e} - 16\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{2}\log^2 2 + 4\mathrm{e} - 16\mathrm{e}^{-1}\,.$$

Esercizio 3

1. Utilizzando un cambiamento in coordinate polari, centrate nel punto $(0,0)$, otteniamo

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^5y - x^3y^3}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^6(\cos^5\theta\sin\theta - \cos^3\theta\sin^3\theta)}{\rho^5} = 0 = f(0,0)$$

indipendentemente da θ. Pertanto, f è continua nell'origine.

2. Poichè la funzione f è identicamente nulla sugli assi cartesiani, si ottiene subito che $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

3. Ponendo $v = (v_1, v_2)$ il generico versore di $\mathbb{R}^2$, dalla definizione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^6(v_1^5v_2 - v_1^3v_2^3)}{t^6} = v_1^5v_2 - v_1^3v_2^3\,.$$

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la *c*), poiché la derivabilità non garantisce né la continuità né la differenziabilità e il gradiente nullo indica solo che siamo in presenza di un punto stazionario.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili, che ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non risolve il problema di Cauchy. Separando le variabili, otteniamo

$$-\int \frac{dy}{y^n} = \int e^{nx}\, dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(n-1)y^{n-1}(x)} = \frac{1}{n}\, e^{nx} + C\,.$$

Esplicitando $y(x)$ ed imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \sqrt[n-1]{\frac{n}{(n-1)e^{nx}}}\,;$$

pertanto il limite proposto sarà dato da

$$\lim_{n\to+\infty} y^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n-1)e^2} = \frac{1}{e^2}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che $f \geq 0$, mentre $g \leq 0$. L'area A della regione considerata si determina calcolando

$$A = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx\,.$$

Utilizzando due volte il metodo di integrazione per parti e la simmetria pari di g, si ottiene

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} [(x^2+4)e^x - \frac{|x|}{1+x^2}\log\frac{1}{1+x^2}]\, dx = [(x^2+4-2x+2)e^x]\Big|_{-1}^{1} + 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)\, dx \\ &= 5e - 9e^{-1} + \frac{1}{2}\log^2(1+x^2)\Big|_0^1 = 5e - 9e^{-1} + \frac{1}{2}\log^2 2\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3

1. Utilizzando un cambiamento in coordinate polari, centrate nel punto $(0,0)$, otteniamo

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^2y^2 - x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^4(\cos^2\theta\sin^2\theta - \cos^3\theta\sin\theta)}{\rho^3} = 0 = f(0,0)$$

indipendentemente da θ. Pertanto, f è continua nell'origine.

2. Poichè la funzione f è identicamente nulla sugli assi cartesiani, si ottiene subito che $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

3. Ponendo $v = (v_1, v_2)$ il generico versore di $\mathbb{R}^2$, dalla definizione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{t^4(v_1^2v_2^2 - v_1^3v_2)}{t^4} = v_1^2v_2^2 - v_1^3v_2\,.$$

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la d), poiché la derivabilità non garantisce né la continuità né la differenziabilità e il gradiente nullo indica solo che siamo in presenza di un punto stazionario.