SOLUZIONI COMPITO del 3/03/2011
ANALISI 1 - BIAR/BSIR 12 CFU
ANALISI 1 (I MODULO e/o II MODULO)
INFORMATICA + AUTOMATICA 5 o 5+5 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo che $f(x) = -2\pi$ se e solo se $x = 1$, cioè $f^{-1}(-2\pi) = 1$. Quindi, dal teorema di derivazione della funzione inversa, tenendo conto che $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x-1} - 2\pi$, si ricava

$$(f^{-1})'(-2\pi) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(-2\pi)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{1+2\pi}\,.$$

Esercizio 2
Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^5 + z^3 - \imath z^2 - \imath = (z^3 - \imath)(z^2 + 1) = 0$. Quindi essa è equivalente alle due equazioni $z^3 - \imath = 0$ e $z^2 + 1 = 0$. La prima ha come soluzioni le 3 radici cubiche di $\imath = \mathrm{e}^{\imath\pi/2}$, ovvero $z = \mathrm{e}^{\imath(\pi/2+2k\pi)/3}$, $k = 0, 1, 2$, da cui $z_1 = -\imath$, $z_2 = \frac{1}{2}(\imath - \sqrt{3})$,$z_3 = \frac{1}{2}(\imath + \sqrt{3})$. La seconda ha come soluzioni le 2 radici quadrate di $-1 = \mathrm{e}^{\imath\pi}$, ovvero $z = \mathrm{e}^{\imath(\pi+2k\pi)/2}$, $k = 0, 1$, da cui $z_4 = \imath$, $z_5 = -\imath$.

Esercizio 3
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per le funzioni $x \mapsto \log(1 - x)$ e $x \mapsto \mathrm{e}^x$ e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin(-x)$, si ottiene

$$\log(1 - x) = -x - x^2/2 + o(x^2) \qquad \sin(-x) = -x + x^3/6 + o(x^3) \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)\,.$$

Pertanto si ricava

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1-x) + \frac{\sin(-x)}{x} + e^x}{x^\alpha} &= \lim_{x\to0^+} \frac{-x - x^2/2 - 1 + x^2/6 + 1 + x + x^2/2}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x\to0^+} \frac{x^2/6}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2, \\ 1/6 & \text{se } \alpha = 2, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi il limite proposto sarà diverso da 0 se e solo se $\alpha \geq 2$.

Domanda 1
Poiché f è non decrescente e concava, si ha che $f'(x) \geq 0$ e $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ricava che

$$F'(x) = [f'(x)]^2 \geq 0 \qquad F''(x) = 2f'(x)f''(x) \leq 0\,,$$

ovvero F è anch'essa non decrescente e concava.

Esercizio 4
Calcolando le derivate parziali, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -3x^4/2 + 2 = 0 \\ y = -x^3/2 \end{cases}$$

da cui si ricava che i punti critici sono $(0, 0)$, $(\pm\frac{\sqrt{2}}{3^{1/4}}, \mp\frac{\sqrt{2}}{3^{3/4}})$.

Esercizio 5
Passando in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene

$$\int\int_D 2xydx\,dy = \int_0^3 \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} 2\rho^3 \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 \left[\sin^2(\theta)\right]_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{3^4}{4}(1-\frac{1}{2}) = \frac{81}{8}\,.$$

Esercizio 6
L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva si ottiene è sufficiente calcolare, per $x > 0$,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C \qquad \int \mathrm{e}^{-\log x}(1+x^2)\,dx = \int \frac{1+x^2}{x}\,dx = \log x + \frac{x^2}{2} + C\,.$$

Pertanto l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\log x} + \mathrm{e}^{\log x}\left(\log x + \frac{x^2}{2}\right) = Cx + x\left(\log x + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(2Cx + x^3 + 2x\ln(x)\right)\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale si ricava

$$-1 = y(1) = \frac{1}{2}(2C+1) \qquad \Longrightarrow \qquad C = -3/2 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \frac{1}{2}\left(-3x + x^3 + 2x\ln(x)\right)\,.$$

Domanda 2
a) è vera per il Teorema del Confronto.
b) è falsa per il Teorema del Confronto Asintotico, poiché $\frac{1}{x^3}$ non è integrabile in senso improprio in $(0,1]$.
c) è falsa, ad esempio $f(x) = \min\{1, \frac{1}{x}\}$ è decrescente, ma non è integrabile in senso improprio in $(0,+\infty)$.
d) è falsa, poiché $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}} \sim \ln(1+\frac{1}{x^{3/2}})$ per $x \to +\infty$, ma $\frac{1}{x^{3/2}}$ non è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che $f(x) = 2\pi$ se e solo se $x = \pi$, cioè $f^{-1}(2\pi) = \pi$. Quindi, dal teorema di derivazione della funzione inversa, tenendo conto che $f'(x) = 2 + \pi \cos x$, si ricava

$$(f^{-1})'(2\pi) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2\pi)\right)} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{2-\pi}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^5 + z^3 + \imath z^2 + \imath = (z^3 + \imath)(z^2 + 1) = 0$. Quindi essa è equivalente alle due equazioni $z^3 + \imath = 0$ e $z^2 + 1 = 0$. La prima ha come soluzioni le 3 radici cubiche di $-\imath = \mathrm{e}^{-\imath\pi/2}$, ovvero $z = \mathrm{e}^{\imath(-\pi/2+2k\pi)/3}$, $k = 0, 1, 2$, da cui $z_1 = \imath$, $z_2 = \frac{1}{2}(-\imath - \sqrt{3})$,$z_3 = \frac{1}{2}(-\imath + \sqrt{3})$. La seconda ha come soluzioni le 2 radici quadrate di $-1 = \mathrm{e}^{\imath\pi}$, ovvero $z = \mathrm{e}^{\imath(\pi+2k\pi)/2}$, $k = 0, 1$, da cui $z_4 = \imath$, $z_5 = -\imath$.

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per le funzioni $x \mapsto \log(1-x)$ e $x \mapsto \mathrm{e}^x$ e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin(-x)$, si ottiene

$$\log(1-x) = -x - x^2/2 + o(x^2) \qquad \cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2) \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)\,.$$

Pertanto si ricava

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x) - \cos(x) + e^x}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x - x^2/2 - 1 + x^2/2 + 1 + x + x^2/2}{x^\alpha} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2/2}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2, \\ 1/2 & \text{se } \alpha = 2, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi il limite proposto sarà diverso da 0 se e solo se $\alpha \geq 2$.

Domanda 1

Poiché f è non decrescente e concava, si ha che $f'(x) \geq 0$ e $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ricava che

$$F'(x) = [f'(x)]^2 \geq 0 \qquad F''(x) = 2f'(x)f''(x) \leq 0\,,$$

ovvero F è anch'essa non decrescente e concava.

Esercizio 4

Calcolando le derivate parziali, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 2y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 3x^4/2 - 2 = 0 \\ y = x^3/2 \end{cases}$$

da cui si ricava che i punti critici sono $(0,0)$, $(\pm\frac{\sqrt{2}}{3^{1/4}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{3^{3/4}})$.

Esercizio 5

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ricava

$$\int\!\!\int_D 2xy dx\, dy = \int_0^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 2\rho^3 \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 \left[\sin^2(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3^4}{4}(\frac{1}{2} - 1) = -\frac{81}{8}\,.$$

Esercizio 6

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva si ottiene è sufficiente calcolare, per $x > 0$,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C \qquad \int e^{-\log x}(x^2-1)\,dx = \int \frac{x^2-1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2} - \log x + C\,.$$

Pertanto l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = Ce^{\log x} + e^{\log x}\left(\frac{x^2}{2} - \log x\right) = Cx + x\left(\frac{x^2}{2} - \log x\right) = \frac{1}{2}\left(2Cx + x^3 - 2x\ln(x)\right)\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale si ricava

$$1 = y(1) = \frac{1}{2}(2C+1) \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1/2 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \frac{1}{2}\left(x + x^3 - 2x\ln(x)\right)\,.$$

Domanda 2

a) è vera per il Teorema del Confronto.
b) è falsa per il Teorema del Confronto Asintotico, poiché $\frac{1}{x^2}$ non è integrabile in senso improprio in $(0, 1]$.
c) è falsa, ad esempio $f(x) = \min\{1, \frac{1}{x}\}$ è decrescente, ma non è integrabile in senso improprio in $(0, +\infty)$.
d) è vera per il Teorema del Confronto Asintotico, perché $f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per $x \to \infty$ e $\frac{1}{x^{3/2}}$ é integrabile in senso improprio in $[1, \infty)$

TEMA C

Esercizio 1 Osserviamo che $f(x) = 2\pi$ se e solo se $x = \mathrm{e}^2$, cioè $f^{-1}(2\pi) = \mathrm{e}^2$. Quindi, dal teorema di derivazione della funzione inversa, tenendo conto che $f'(x) = 1 + \pi/x$, si ricava

$$(f^{-1})'(2\pi) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2\pi)\right)} = \frac{1}{f'(\mathrm{e}^2)} = \frac{1}{1+\frac{\pi}{e^2}}\,.$$

Esercizio 2
Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^5 - z^3 + \imath z^2 - \imath = (z^3 + \imath)(z^2 - 1) = 0$. Quindi essa è equivalente alle due equazioni $z^3 + \imath = 0$ e $z^2 - 1 = 0$. La prima ha come soluzioni le 3 radici cubiche di $-\imath = \mathrm{e}^{-\imath\pi/2}$, ovvero $z = \mathrm{e}^{\imath(-\pi/2+2k\pi)/3}$, $k = 0, 1, 2$, da cui $z_1 = \imath$, $z_2 = \frac{1}{2}(-\imath-\sqrt{3})$,$z_3 = \frac{1}{2}(-\imath+\sqrt{3})$. La seconda ha come soluzioni le 2 radici quadrate di $1 = \mathrm{e}^{\imath 0}$, ovvero $z = \mathrm{e}^{\imath(0+2k\pi)/2}$, $k = 0, 1$, da cui $z_4 = 1$, $z_5 = -1$.

Esercizio 3
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per le funzioni $x \mapsto \log(1 - x)$ e $x \mapsto \mathrm{e}^x$ e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin(-x)$, si ottiene

$$\log(1-x) = -x - x^2/2 + o(x^2) \qquad \cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2) \qquad \mathrm{e}^{-x} = 1 - x + x^2/2 + o(x^2)\,.$$

Pertanto si ricava

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x) + \cos(x) - e^{-x}}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x - x^2/2 + 1 - x^2/2 - 1 + x - x^2/2}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-3x^2/2}{x^\alpha} \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2, \\ -3/2 & \text{se } \alpha = 2, \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi il limite proposto sarà diverso da 0 se e solo se $\alpha \geq 2$.

Domanda 1
Poiché f è non decrescente e concava, si ha che $f'(x) \geq 0$ e $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ricava che

$$F'(x) = [f'(x)]^2 \geq 0 \qquad F''(x) = 2f'(x)f''(x) \leq 0\,,$$

ovvero F è anch'essa non decrescente e concava.

Esercizio 4
Calcolando le derivate parziali, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 3x^4/2 + 2 = 0 \\ y = x^3/2 \end{cases}$$

da cui si ricava che l'unico punto critico è $(0, 0)$.

Esercizio 5
Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ricava

$$\int\int_D 2xy dx\, dy = \int_0^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\rho^3 \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 \left[\sin^2(\theta)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3^4}{4}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{81}{8}\,.$$

Esercizio 6

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva si ottiene è sufficiente calcolare, per $x > 0$,

$$\int -\frac{1}{x}\,dx = -\log x + C \qquad \int \mathrm{e}^{\log x}(x^2+1)\,dx = \int x(x^2+1)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C\,.$$

Pertanto l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-\log x} + \mathrm{e}^{-\log x}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right) = C\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{4x}\left(4C + 2x^2 + x^4\right)\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale si ricava

$$1 = y(1) = \frac{1}{4}(4C+3) \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1/4 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \frac{1}{4x}\left(1 + 2x^2 + x^4\right)\,.$$

Domanda 2

a) è falsa, basta considerare, ad esempio, $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ e $f(x) = 1$.
b) è vera per il Teorema del Confronto asintotico, poiché $\frac{1}{x^{1/2}}$ è integrabile in senso improprio in $(0, 1]$.
c) è falsa, ad esempio $f(x) = \min\{1, \frac{1}{x}\}$ è decrescente, ma non è integrabile in senso improprio in $(0, +\infty)$.
d) è falsa per il Teorema del Confronto Asintotico, perché $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}} \sim \sin(\frac{1}{x^{1/2}})$ per $x \to \infty$ e $\frac{1}{x^{1/2}}$ non è integrabile in senso improprio in $[1, \infty)$

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che $f(x) = 2\pi$ se e solo se $x = 0$, cioè $f^{-1}(2\pi) = 0$. Quindi, dal teorema di derivazione della funzione inversa, tenendo conto che $f'(x) = 1 + 2\pi e^x$, si ricava

$$(f^{-1})'(2\pi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2\pi))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+2\pi}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^5 - z^3 - \imath z^2 + \imath = (z^3 - \imath)(z^2 - 1) = 0$. Quindi essa è equivalente alle due equazioni $z^3 - \imath = 0$ e $z^2 - 1 = 0$. La prima ha come soluzioni le 3 radici cubiche di $\imath = e^{\imath\pi/2}$, ovvero $z = e^{\imath(\pi/2+2k\pi)/3}$, $k = 0, 1, 2$, da cui $z_1 = -\imath$, $z_2 = \frac{1}{2}(\imath - \sqrt{3})$,$z_3 = \frac{1}{2}(\imath + \sqrt{3})$. La seconda ha come soluzioni le 2 radici quadrate di $1 = e^{\imath 0}$, ovvero $z = e^{\imath(0+2k\pi)/2}$, $k = 0, 1$, da cui $z_4 = 1$, $z_5 = -1$.

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per le funzioni $x \mapsto \log(1-x)$ e $x \mapsto e^x$ e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin(-x)$, si ottiene

$$\log(1-x) = -x - x^2/2 + o(x^2) \qquad \sin x = x + x^3/6 + o(x^2) \qquad e^{-x} = 1 - x + x^2/2 + o(x^2)\,.$$

Pertanto si ricava

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x) + \frac{\sin(x)}{x} - e^{-x}}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x - x^2/2 + 1 - x^2/6 - 1 + x - x^2/2}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-7x^2/6}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2, \\ -7/6 & \text{se } \alpha = 2, \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi il limite proposto sarà diverso da 0 se e solo se $\alpha \geq 2$.

Domanda 1

Poiché f è non decrescente e concava, si ha che $f'(x) \geq 0$ e $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ricava che

$$F'(x) = [f'(x)]^2 \geq 0 \qquad F''(x) = 2f'(x)f''(x) \leq 0\,,$$

ovvero F è anch'essa non decrescente e concava.

Esercizio 4

Trovare i punti critici di $f(x,y) = x^3y - x^2 + y^2$.

Calcolando le derivate parziali, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -3x^4/2 - 2 = 0 \\ y = -x^3/2 \end{cases}$$

da cui si ricava che l'unico punto critico è $(0,0)$.

Esercizio 5

Passando in coordinate polari centrate nell'origine si ricava

$$\int\int_D 2xy dx\, dy = \int_0^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} 2\rho^3 \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 \left[\sin^2(\theta)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{3^4}{4}(\frac{1}{2} - 1) = -\frac{81}{8}\,.$$

Esercizio 6

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva si ottiene è sufficiente calcolare, per $x > 0$,

$$\int -\frac{1}{x}\, dx = -\log x + C \qquad \int \mathrm{e}^{\log x}(x^2 - 1)\, dx = \int x(x^2 - 1)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C\,.$$

Pertanto l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-\log x} + \mathrm{e}^{-\log x}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) = C\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{4x}\left(4C - 2x^2 + x^4\right)\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale si ricava

$$-1 = y(1) = \frac{1}{4}(4C - 1) \qquad \Longrightarrow \qquad C = -3/4 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \frac{1}{4x}\left(-3 - 2x^2 + x^4\right)\,.$$

Domanda 2

a) è falsa, basta prendere, ad esempio, $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ e $f(x) = 1$.
b) è falsa per il Teorema del Confronto Asintotico, poiché $\frac{1}{x^2}$ non è integrabile in senso improprio in $(0,1]$.
c) è falsa, ad esempio $f(x) = \min\{1, \frac{1}{x}\}$ è decrescente, ma non è integrabile in senso improprio in $(0,+\infty)$.
d) è falsa, poiché $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}} \sim \ln(1 + \frac{1}{x^{3/2}})$ per $x \to +\infty$, ma $\frac{1}{x^{3/2}}$ non è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$.