SOLUZIONI COMPITO del 3/06/2013
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
INGEGNERIA MECCANICA - INGEGNERIA ENERGETICA
INGEGNERIA AMBIENTE e TERRITORIO

TEMA A

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = [\log(1+\mathrm{e}^{-n}) - \sin(\mathrm{e}^{-n})]$ e quello al secondo ordine per le funzione $t \mapsto \log(1+t)$ e $t \mapsto \sin t$, con $t = \mathrm{e}^{-n}$, otteniamo

$$\mathrm{e}^{(\alpha+1)n} \sin\left[\log(1+\mathrm{e}^{-n}) - \sin(\mathrm{e}^{-n})\right] \sim \mathrm{e}^{(\alpha+1)n}\left[\log(1+\mathrm{e}^{-n}) - \sin(\mathrm{e}^{-n})\right] \sim \mathrm{e}^{(\alpha+1)n}\left[\mathrm{e}^{-n} - \frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2} - \mathrm{e}^{-n}\right]$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+1)n}\,\mathrm{e}^{-2n}}{2} = -\frac{\mathrm{e}^{(\alpha-1)n}}{2} \to \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 1; \\ -1/2 & \text{se } \alpha = 1; \\ 0 & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $a + ib + \frac{1}{2}a(a - ib) - 2i = 0$ che conduce al sistema

$$\begin{cases} a + \dfrac{1}{2}a^2 = 0; \\ b - \dfrac{1}{2}ab - 2 = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \begin{cases} a = 0; \\ b = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{2}a = 0; \\ b\left(1 - \dfrac{1}{2}a\right) = 2; \end{cases} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = -2; \\ b = 1. \end{cases}$$

Pertanto, l'equazione proposta ammette due soluzioni $z_1 = 2i$ e $z_1 = -2 + i$. Chiaramente, poiché $|z_1| = 2$ e $|z_2| = \sqrt{5}$, si ha che $z_0 = z_1$, da cui

$$\sqrt[4]{2i} = \sqrt[4]{2\mathrm{e}^{\pi i/2}} = \begin{cases} \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{5\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{9\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{13\pi i/8}. \end{cases}$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Le soluzioni sono $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, per cui la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = \mathrm{e}^x[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)]$.

Poiché $\lambda = 1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione completa, si ricava $y'(x) = y''(x) = A\mathrm{e}^x$, da cui $A - 2A + 5A = 3$, cioè $A = 3/4$; pertanto, la soluzione dell'equazione completa sarà $y(x) = \mathrm{e}^x[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] + \frac{3}{4}\mathrm{e}^x$. Imponiamo ora le condizioni iniziali: $3/4 = y(0) = C_1 + 3/4$, da cui $C_1 = 0$, e $7/4 = y'(0) = 2C_2 + 3/4$, da cui $C_2 = 1/2$. Concludendo, la soluzione richiesta sarà $y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sin(2x) + \frac{3}{4}\mathrm{e}^x$.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione di variabile $t = \sqrt[3]{3-x}$, da cui $x = 3 - t^3$, $dx = -3t^2\,dt$, $t(2) = 1$ e $t(3) = 0$, ed utilizzando, successivamente, un'integrazione per parti, l'integrale proposto diventa

$$
\begin{aligned}
&\int_2^3 (1+\sqrt[3]{3-x})\arctan(\sqrt[3]{3-x})\,dx = -3\int_1^0 t^2(1+t)\arctan t\,dt = 3\int_0^1 (t^2+t^3)\arctan t\,dt\\
=&3\left[\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}\right)\arctan t\Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt\right]\\
=&3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{4} - 3\int_0^1 \frac{1}{3}\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt - 3\int_0^1\frac{1}{4}\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\
=&\frac{7\pi}{16} - \left[\frac{t^2}{2}-\log(\sqrt{1+t^2})\right]\Big|_0^1 - \frac{3}{4}\left[\frac{t^3}{3}-t+\arctan t\right]\Big|_0^1\\
=&\frac{7\pi}{16}-\frac{1}{2}+\log\sqrt{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{4}+\log\sqrt{2}\,,
\end{aligned}
$$

dove è stata svolta la divisione tra i due polinomi $(t^3/3 + t^4/4)$ e $(1 + t^2)$.

Esercizio 5

L'affermazione è falsa, infatti basta considerare, ad esempio, la funzione

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\log 2} & \text{se } x \le 2,\\[2mm] \dfrac{1}{x\log x} & \text{se } x > 2. \end{cases}
$$

Ovviamente $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, è positiva e $f(x)/x^{-1} = f(x)\,x = 1/\log x \to 0$ per $x \to +\infty$, cioè $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to +\infty$. Inoltre,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_0^2 \frac{1}{2\log 2} + \lim_{M\to+\infty}\int_2^M \frac{1}{x\log x}\,dx = \frac{1}{\log 2} + \lim_{M\to+\infty}\log(\log x)\Big|_2^M\\
&= \frac{1}{\log 2} + \lim_{M\to+\infty}\left[\log(\log M) - \log(\log 2)\right] = +\infty\,.
\end{aligned}
$$

TEMA B

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt[5]{1+t}$, con $t = \tan(\mathrm{e}^{-n}) - \log(1+\mathrm{e}^{-n})$ e quello al secondo ordine per le funzione $t \mapsto \tan t$ e $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \mathrm{e}^{-n}$, otteniamo

$$\mathrm{e}^{(\alpha-1)n}\left[\sqrt[5]{1+\tan(\mathrm{e}^{-n})-\log(1+\mathrm{e}^{-n})}-1\right] \sim \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{(\alpha-1)n}\left[\tan(\mathrm{e}^{-n})-\log(1+\mathrm{e}^{-n})\right]$$
$$\sim \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{(\alpha-1)n}\left[\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{-n}+\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2}\right] = \frac{1}{5}\,\frac{\mathrm{e}^{(\alpha-1)n}\mathrm{e}^{-2n}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{(\alpha-3)n}}{10} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3; \\ 1/10 & \text{se } \alpha = 3; \\ 0 & \text{se } \alpha < 3. \end{cases}$$

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $a - ib - b(a+ib) + 2 = 0$ che conduce al sistema

$$\begin{cases} a - ab + 2 = 0; \\ -b - b^2 = 0; \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \begin{cases} b = 0; \\ a = -2; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 - b = 0; \\ a\,(1-b) = -2; \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} a = -1; \\ b = -1. \end{cases} \end{cases}$$

Pertanto, l'equazione proposta ammette due soluzioni $z_1 = -2$ e $z_1 = -1 - i$. Chiaramente, poiché $|z_1| = 2$ e $|z_2| = \sqrt{2}$, si ha che $z_0 = z_1$, da cui

$$\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{i\pi} = \begin{cases} \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\pi i/4} = \sqrt[4]{2}(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2); \\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{3\pi i/4} = \sqrt[4]{2}(-\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2); \\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{5\pi i/4} = \sqrt[4]{2}(-\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2); \\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{7\pi i/4} = \sqrt[4]{2}(\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2). \end{cases}$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Le soluzioni sono $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, per cui la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = \mathrm{e}^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Poiché $\lambda = 2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione completa, si ricava $y'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x}$, $y''(x) = 4A\mathrm{e}^{2x}$, da cui $4A - 8A + 5A = 4$, cioè $A = 4$; pertanto, la soluzione dell'equazione completa sarà $y(x) = \mathrm{e}^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 4\mathrm{e}^{2x}$. Imponiamo ora le condizioni iniziali: $4 = y(0) = C_1 + 4$, da cui $C_1 = 0$, e $9 = y'(0) = C_2 + 8$, da cui $C_2 = 1$. Concludendo, la soluzione richiesta sarà $y(x) = \mathrm{e}^{2x}\sin x + 4\mathrm{e}^{2x}$.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione di variabile $t = \sqrt[3]{x+2}$, da cui $x = t^3 - 2$, $dx = 3t^2\,dt$, $t(2) = 0$ e $t(3) = 1$, ed utilizzando, successivamente, un'integrazione per parti, l'integrale proposto diventa

$$\int_2^3 \left[1 - \frac{5}{3}(\sqrt[3]{x-2})^2\right]\log(1+\sqrt[3]{x-2})\,dx$$
$$=3\int_0^1 t^2\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)\log(1+t)\,dt = 3\int_0^1 (t^2 - \frac{5}{3}t^4)\log(1+t)\,dt$$
$$=3\left[\left(\frac{t^3}{3}-\frac{5}{3}\frac{t^5}{5}\right)\log(1+t)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{3}\right)\frac{1}{1+t}\,dt\right]$$
$$=3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\log 2 - \int_0^1 (t^3-t^5)\frac{1}{1+t}\,dt = -\int_0^1 t^3(1-t^2)\frac{1}{1+t}\,dt$$
$$=-\int_0^1 t^3(1-t)(1+t)\frac{1}{1+t}\,dt = -\int_0^1 t^3(1-t)\,dt = -\int_0^1 (t^3-t^4)\,dt$$
$$=\left(-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = -\frac{1}{20}\,,$$

dove è stato utilizzato il prodotto notevole $1 - t^2 = (1 - t)(1 + t)$.

Esercizio 5
L'affermazione è falsa, infatti basta considerare, ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\log 2} & \text{se } x \leq 2, \\ \dfrac{1}{x \log x} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Ovviamente $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, è positiva e $f(x)/x^{-1} = f(x)\, x = 1/\log x \to 0$ per $x \to +\infty$, cioè $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to +\infty$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_0^2 \frac{1}{2\log 2} + \lim_{M \to +\infty} \int_2^M \frac{1}{x \log x}\, dx = \frac{1}{\log 2} + \lim_{M \to +\infty} \log(\log x)\Big|_2^M \\ &= \frac{1}{\log 2} + \lim_{M \to +\infty} [\log(\log M) - \log(\log 2)] = +\infty\,. \end{aligned}$$