SOLUZIONI COMPITO del 3/06/2013
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
INGEGNERIA ENERGETICA

Esercizio 1
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = [\log(1 + \mathrm{e}^{-n}) - \sin(\mathrm{e}^{-n})]$ e quello al secondo ordine per le funzione $t \mapsto \log(1 + t)$ e $t \mapsto \sin t$, con $t = \mathrm{e}^{-n}$, otteniamo

$$a_n := \sin\left[\log(1 + \mathrm{e}^{-n}) - \sin(\mathrm{e}^{-n})\right] \sim \left[\log(1 + \mathrm{e}^{-n}) - \sin(\mathrm{e}^{-n})\right] \sim \left[\mathrm{e}^{-n} - \frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2} - \mathrm{e}^{-n}\right] = -\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2}\,.$$

Quindi la serie proposta è a termini negativi. Raccogliendo un segno meno e applicando, ad esempio, il criterio della radice, otteniamo

$$\sqrt[n]{-a_n} \sim \sqrt[n]{\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2}} = \mathrm{e}^{-2} < 1\,.$$

Quindi la serie proposta converge.

Esercizio 2
La funzione proposta è sempre non negativa.
Osserviamo che $x^2 - |2x + 3| \geq 0$ se e solo se $|2x + 3| \leq x^2 \iff -x^2 \leq 2x + 3 \leq x^2$, ovvero

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0\,; \\ x^2 + 2x + 3 \geq 0\,; \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq -1 \text{ e } x \geq 3\,; \\ \forall x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Pertanto, la funzione proposta può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - |2x + 3| & \text{se } x \leq -1 \text{ e } x \geq 3, \\ |2x + 3| - x^2 & \text{se } -1 < x < 3, \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{se } -3/2 \leq x \leq -1 \text{ e } x \geq 3, \\ x^2 + 2x + 3 & \text{se } x \leq -3/2, \\ 2x + 3 - x^2 & \text{se } -1 < x < 3. \end{cases}$$

Pertanto,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } -3/2 < x < -1 \text{ e } x > 3, \\ 2x + 2 & \text{se } x < -3/2, \\ -2x + 2 & \text{se } -1 < x < 3, \end{cases}$$

mentre $x = -3/2; -1; 3$ sono punti angolosi. Quindi $f'(x) < 0$ per $x < -3/2$, $-3/2 < x < -1$ e $1 < x < 3$, mentre $f'(x) > 0$ per $-1 < x < 1$ e $x > 3$. Da ciò si ricava che $x = -1$ e $x = 3$ sono punti di minimo assoluto, dove f assume il valore nullo (cioè $\inf f = \min f = 0$); invece, $x = 1$ è punto di massimo relativo, dove si ha $f(1) = 4$. La funzione non ammette massimo assoluto e ha estremo superiore pari a $+\infty$, poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Le soluzioni sono $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, per cui la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = \mathrm{e}^x[C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)]$.

Poiché $\lambda = 1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione completa, si ricava $y'(x) = y''(x) = A\mathrm{e}^x$, da cui $A - 2A + 5A = 3$, cioè $A = 3/4$; pertanto, la soluzione dell'equazione completa sarà $y(x) = \mathrm{e}^x[C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)] + \frac{3}{4}\mathrm{e}^x$. Imponiamo ora le condizioni iniziali: $3/4 = y(0) = C_1 + 3/4$, da cui $C_1 = 0$, e $7/4 = y'(0) = 2C_2 + 3/4$, da cui $C_2 = 1/2$. Concludendo, la soluzione richiesta sarà $y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \sin(2x) + \frac{3}{4}\mathrm{e}^x$.

Esercizio 4

Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate nell'origine, l'integrale proposto diventa

$$\iint_E \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\sqrt{x^2+y^2}}}\,\log\sqrt{3+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{E}} \rho\,\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\rho}}\,\log\sqrt{3+\rho}\,d\rho\,d\theta\,,$$

dove $\tilde{E} = \{1 \le \rho \le 6,\ 0 \le \theta \le \pi/2\}$. Effettuando un'ulteriore sostituzione di variabile $t = \sqrt{3+\rho}$, da cui $\rho = t^2 - 3$, $d\rho = 2t\,dt$, $t(1) = 2$, $t(6) = 3$, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\iint_{\tilde{E}} \rho\,\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\rho}}\,\log\sqrt{3+\rho}\,d\rho\,d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_1^6 \rho\,\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\rho}}\,\log\sqrt{3+\rho}\,d\rho\right)\\
=&\frac{\pi}{2}\,2\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3}+t}\,\log t\,(t^2-3)\,t\,dt = \pi\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3}+t}\,\log t\,(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})\,t\,dt\\
=&\pi\left[\left(\frac{t^3}{3}-\sqrt{3}\frac{t^2}{2}\right)\log t\Big|_2^3 - \int_2^3\left(\frac{t^3}{3}-\sqrt{3}\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{t}\,dt\right]\\
=&\pi\left[\left(9-\frac{9}{2}\sqrt{3}\right)\log 3 - \left(\frac{8}{3}-2\sqrt{3}\right)\log 2 - \int_2^3\left(\frac{t^2}{3}-\sqrt{3}\frac{t}{2}\right)dt\right]\\
=&\pi\left[9\log 3 - \frac{9}{2}\log 3\sqrt{3} - \frac{8}{3}\log 2 + 2\sqrt{3}\log 2 - \left(\frac{t^3}{9}-\frac{\sqrt{3}t}{4}\right)\Big|_2^3\right]\\
=&\pi\left[9\log 3 - \frac{9}{2}\log 3\sqrt{3} - \frac{8}{3}\log 2 + 2\sqrt{3}\log 2 - 3 + \frac{8}{9} + \frac{9\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}\right].
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Osserviamo, innanzitutto, che per $x \to 0$ si ha

$$g(x) = \frac{f(x)-2-2x^2}{3\sin x + 4x^3} \sim \frac{2+3x^2-2-2x^2}{3x} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3} \to 0\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $x \to 0$, $3\sin x + 4x^3 \sim 3x + 4x^3 \sim 3x$. Quindi g è continua nell'origine. Inoltre, calcolando il limite del rapporto incrementale, si ricava

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-2-2x^2}{3\sin x+4x^3}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x/3}{x} = 1/3\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del risultato precedente. Poiché il limite del rapporto incrementale esiste finito, si ottiene che la funzione g è derivabile nell'origine e $g'(0) = 1/3$.