SOLUZIONI COMPITO del 3/06/2013
ANALISI MATEMATICA I - 5 CFU
INGEGNERIA ENERGETICA

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = [\log(1 + \mathrm{e}^{-n}) - \sin(\mathrm{e}^{-n})]$ e quello al secondo ordine per le funzione $t \mapsto \log(1 + t)$ e $t \mapsto \sin t$, con $t = \mathrm{e}^{-n}$, otteniamo

$$a_n := \sin\left[\log(1 + \mathrm{e}^{-n}) - \sin(\mathrm{e}^{-n})\right] \sim \left[\log(1 + \mathrm{e}^{-n}) - \sin(\mathrm{e}^{-n})\right] \sim \left[\mathrm{e}^{-n} - \frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2} - \mathrm{e}^{-n}\right] = -\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2}\,.$$

Quindi la serie proposta è a termini negativi. Raccogliendo un segno meno e applicando, ad esempio, il criterio della radice, otteniamo

$$\sqrt[n]{-a_n} \sim \sqrt[n]{\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2}} = \mathrm{e}^{-2} < 1\,.$$

Quindi la serie proposta converge.

Esercizio 2

Osserviamo che la funzione proposta è continua nell'intervallo $(0, 1]$; pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno di 0^+. Ricordando che, per $x \to 0^+$, si ha

$$\log(1 + \sin x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + o(x^2) \quad \text{e} \quad \sin(x^{5/2}) - 3x^5 \sim x^{5/2} - 3x^5 \sim x^{5/2}\,,$$

otteniamo

$$f(x) \sim \frac{\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x - \sin x}{x^{5/2}} = -\frac{\sin^2 x}{2x^{5/2}} \sim -\frac{x^2}{2x^{5/2}} = -\frac{1}{2x^{1/2}}\,,$$

dove abbiamo utilizzato anche il fatto che $\sin^2 x \sim x^2$. Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, poiché $1/2 < 1$, l'integrale proposto esiste finito.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Le soluzioni sono $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, per cui la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = \mathrm{e}^x[C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)]$.

Poiché $\lambda = 1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione completa, si ricava $y'(x) = y''(x) = A\mathrm{e}^x$, da cui $A - 2A + 5A = 3$, cioè $A = 3/4$; pertanto, la soluzione dell'equazione completa sarà $y(x) = \mathrm{e}^x[C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)] + \frac{3}{4}\mathrm{e}^x$. Imponiamo ora le condizioni iniziali: $3/4 = y(0) = C_1 + 3/4$, da cui $C_1 = 0$, e $7/4 = y'(0) = 2C_2 + 3/4$, da cui $C_2 = 1/2$. Concludendo, la soluzione richiesta sarà $y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \sin(2x) + \frac{3}{4}\mathrm{e}^x$.

Esercizio 4

Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate nell'origine, l'integrale proposto diventa

$$\iint_E \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + \sqrt{x^2 + y^2}}} \log\sqrt{3 + \sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{E}} \rho\,\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + \rho}} \log\sqrt{3 + \rho}\,d\rho\,d\theta\,,$$

dove $\tilde{E} = \{1 \le \rho \le 6,\ 0 \le \theta \le \pi/2\}$. Effettuando un'ulteriore sostituzione di variabile $t = \sqrt{3 + \rho}$, da cui

$\rho = t^2 - 3$, $d\rho = 2t\,dt$, $t(1) = 2$, $t(6) = 3$, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\iint_{\tilde{E}} \rho \,\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3+\rho}}\, \log\sqrt{3+\rho}\, d\rho\, d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_1^6 \rho\,\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3+\rho}}\,\log\sqrt{3+\rho}\,d\rho\right)\\
=&\frac{\pi}{2}\,2\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3}+t}\,\log t\,(t^2-3)\,t\,dt = \pi\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3}+t}\,\log t\,(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})\,t\,dt\\
=&\pi\left[\left(\frac{t^3}{3} - \sqrt{3}\frac{t^2}{2}\right)\log t\Big|_2^3 - \int_2^3\left(\frac{t^3}{3} - \sqrt{3}\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{t}\,dt\right]\\
=&\pi\left[\left(9 - \frac{9}{2}\sqrt{3}\right)\log 3 - \left(\frac{8}{3} - 2\sqrt{3}\right)\log 2 - \int_2^3\left(\frac{t^2}{3} - \sqrt{3}\frac{t}{2}\right)\,dt\right]\\
=&\pi\left[9\log 3 - \frac{9}{2}\sqrt{3}\log 3 - \frac{8}{3}\log 2 + 2\sqrt{3}\log 2 - \left(\frac{t^3}{9} - \frac{\sqrt{3}t}{4}\right)\Big|_2^3\right]\\
=&\pi\left[9\log 3 - \frac{9}{2}\sqrt{3}\log 3 - \frac{8}{3}\log 2 + 2\sqrt{3}\log 2 - 3 + \frac{8}{9} + \frac{9\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}\right].
\end{aligned}$$

Esercizio 5

L'affermazione è falsa, infatti basta considerare, ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\log 2} & \text{se } x \le 2,\\[2mm] \dfrac{1}{x\log x} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Ovviamente $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, è positiva e $f(x)/x^{-1} = f(x)\,x = 1/\log x \to 0$ per $x \to +\infty$, cioè $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to +\infty$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_0^2 \frac{1}{2\log 2} + \lim_{M\to+\infty}\int_2^M \frac{1}{x\log x}\,dx = \frac{1}{\log 2} + \lim_{M\to+\infty}\log(\log x)\Big|_2^M\\
&= \frac{1}{\log 2} + \lim_{M\to+\infty}\left[\log(\log M) - \log(\log 2)\right] = +\infty\,.
\end{aligned}$$