SOLUZIONI COMPITO del 04/02/2016
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è una serie a termini non negativi. Applicando il criterio della radice, dopo aver messo in evidenza il termine dominante, otteniamo

$$a_n := \frac{|2\log x - \frac{1}{2}|^n}{3n^x + 2} \sim \frac{|2\log x - \frac{1}{2}|^n}{3n^x} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{\frac{|2\log x - \frac{1}{2}|^n}{3n^x}} = \frac{|2\log x - \frac{1}{2}|}{\sqrt[n]{3}(\sqrt[n]{n})^x} \to |2\log x - \frac{1}{2}|\,.$$

Quindi la serie converge per $|2\log x - \frac{1}{2}| < 1$, cioè $-1 < 2\log x - \frac{1}{2} < 1$, che fornisce

$$t\begin{cases} 2\log x < 3/2 \\ 2\log x > -1/2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \log x < 3/4 \\ \log x > -1/4 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-1/4} < x < \mathrm{e}^{3/4}\,;$$

mentre diverge per $x < \mathrm{e}^{-1/4}$ oppure $x > \mathrm{e}^{3/4}$. Infine, per $\widetilde{x} = \mathrm{e}^{-1/4}$, $a_n = 1/(3n^{\tilde{x}} + 2) \sim 1/(3n^{\tilde{x}})$ che diverge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\widetilde{x} = \mathrm{e}^{-1/4} < 1$, mentre per $\widehat{x} = \mathrm{e}^{3/4}$, $a_n = 1/(3n^{\hat{x}} + 2) \sim 1/(3n^{\hat{x}})$ che converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\widehat{x} = \mathrm{e}^{3/4} > 1$.

Esercizio 2

Per $\alpha = 1$, effettuando la sostituzione $y = x^2$, da cui $2x\,dx = dy$, otteniamo

$$\begin{aligned}\int (x^3 + 2x)\mathrm{e}^{2x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int (x^2+2)\mathrm{e}^{2x^2}2x\,dx = \frac{1}{2}\int (y+2)\mathrm{e}^{2y}\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y\mathrm{e}^{2y}}{2} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2y}\,dy + \frac{2\mathrm{e}^{2y}}{2} + C\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{y\mathrm{e}^{2y}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2y}}{4} + \mathrm{e}^{2y} + C\right) = \mathrm{e}^{2x^2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}\right) + C\,.\end{aligned}$$

Invece, tenendo conto che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α è dispari (cioè $f_\alpha(x) = -f_\alpha(-x)$) e l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine, si ricava subito che l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea.

Consideriamo dapprima il caso $\alpha \neq 1$. L'equazione caratteristica associata è $4\lambda^2 + (\alpha - 1) = 0$ che ha per soluzioni

$$\lambda^2 = \frac{1-\alpha}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{1-\alpha}}{2} & \text{se } \alpha < 1, \\ \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{\alpha-1}}{2}\,i & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\begin{aligned} y_0(x) &= C_1\mathrm{e}^{x\sqrt{1-\alpha}/2} + C_2\mathrm{e}^{-x\sqrt{1-\alpha}/2} & &\text{se } \alpha < 1, \\ y_0(x) &= C_1\cos(x\sqrt{\alpha-1}/2) + C_2\sin(x\sqrt{\alpha-1}/2) & &\text{se } \alpha > 1. \end{aligned}$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza che fornisce $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa e ricordando il principio di identità dei polinomi, ricaviamo $8A + (\alpha - 1)(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2$, da cui

$$\begin{cases} (\alpha-1)A = 2\,, \\ (\alpha-1)B = 0\,, \\ 8A + (\alpha-1)C = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{2}{\alpha-1}\,, \quad B = 0\,, \quad C = -\frac{16}{(\alpha-1)^2}\,.$$

Quindi l'integrale generale è dato da

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C_1 \mathrm{e}^{x\sqrt{1-\alpha}/2} + C_2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{1-\alpha}/2} + \frac{2}{\alpha-1}x^2 - \frac{16}{(\alpha-1)^2} && \text{se } \alpha < 1, \\
y(x) &= C_1 \cos(x\sqrt{\alpha-1}/2) + C_2 \sin(x\sqrt{\alpha-1}/2) + \frac{2}{\alpha-1}x^2 - \frac{16}{(\alpha-1)^2} && \text{se } \alpha > 1.
\end{aligned}
$$

Invece per $\alpha = 1$, l'equazione differenziale si riduce a $y''(x) = x^2/2$, da cui, integrando due volte, otteniamo che l'integrale generale è dato da $y(x) = \frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2$.

Esercizio 4

Per determinare gli estremanti di f studiamone la monotonia attraverso la derivata. Da ciò ricaviamo

$$
f'(x) = \frac{4\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x - 2) - \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^{2x}+1)}{(\mathrm{e}^x-2)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-2)^2}(2\mathrm{e}^{2x} - 8\mathrm{e}^x - 1)\,.
$$

Quindi il segno della derivata è determinato dal segno del fattore $2\mathrm{e}^{2x} - 8\mathrm{e}^x - 1$ il quale, con il cambio di variabile $t = \mathrm{e}^x$, si trasforma nel trinomio di secondo grado $2t^2 - 8t - 1$. Tale trinomio si annulla per $t = \frac{4\pm\sqrt{18}}{2}$, ma essendo $t = \mathrm{e}^x$, l'unica radice ammissibile è quella positiva, data da $t = \frac{4+\sqrt{18}}{2}$, ovvero $x = \log\left(2 + \frac{\sqrt{18}}{2}\right) \in [\log 3, \log 5]$. Pertanto, otteniamo

$$
f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > \log\left(2+\frac{\sqrt{18}}{2}\right), \\ = 0 & \text{se } x = \log\left(2+\frac{\sqrt{18}}{2}\right), \\ < 0 & \text{se } x < \log\left(2+\frac{\sqrt{18}}{2}\right). \end{cases}
$$

Quindi $x = \log\left(2 + \frac{\sqrt{18}}{2}\right)$ è punto di minimo assoluto, mentre gli estremi dell'intervallo, cioè i punti $x = \log 3$ e $x = \log 5$, sono punti di massimo relativo. Per stabilire quale dei due sia anche punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione agli estremi, ottenendo $f(\log 3) = 19$ ed $f(\log 5) = 51/3 = 17$. Pertanto, $x = \log 3$ è punto di massimo assoluto, mentre $x = \log 5$ è punto di massimo relativo. Concludiamo osservando che la funzione proposta è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[\log 3, \log 5]$, pertanto l'esistenza di estremanti assoluti è garantita dal Teorema di Weierstrass.

Esercizio 5

Osserviamo che le affermazioni C) e D) sono false; infatti, prendendo $a_n = b_n = \frac{1}{n^3} = o(1/n)$, si ottiene che la serie $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^3}$ e la serie $\sum n b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ sono entrambe convergenti. Invece, le affermazioni A) e B) sono corrette. Infatti, poiché $a_n \sim b_n$, si ottiene che $\frac{a_n}{b_n} \to 1 \neq 0$, quindi la condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta e la serie $\sum \frac{a_n}{b_n}$ diverge, mentre $a_n b_n \sim (a_n)^2 = o(1/n^2)$, cioè $\frac{a_n b_n}{1/n^2} \to 0$, quindi $a_n b_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{a_n b_n}{1/n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum a_n b_n$ converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è una serie a termini non negativi. Applicando il criterio della radice, dopo aver messo in evidenza il termine dominante, otteniamo

$$a_n := \frac{|2e^x - 5|^n}{5n^x + 4} \sim \frac{|2e^x - 5|^n}{5n^x} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{\frac{|2e^x - 5|^n}{5n^x}} = \frac{|2e^x - 5|}{\sqrt[n]{5}(\sqrt[n]{n})^x} \to |2e^x - 5|\,.$$

Quindi la serie converge per $|2e^x - 5| < 1$, cioè $-1 < 2e^x - 5 < 1$, che fornisce

$$\begin{cases} 2e^x < 6 \\ 2e^x > 4 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} e^x < 3 \\ e^x > 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \log 2 < x < \log 3\,;$$

mentre diverge per $x < \log 2$ oppure $x > \log 3$. Infine, per $\widetilde{x} = \log 2$, $a_n = 1/(5n^{\widetilde{x}} + 4) \sim 1/(5n^{\widetilde{x}})$ che diverge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\widetilde{x} = \log 2 < 1$, mentre per $\widehat{x} = \log 3$, $a_n = 1/(5n^{\widehat{x}} + 4) \sim 1/(5n^{\widehat{x}})$ che converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\widehat{x} = \log 3 > 1$.

Esercizio 2

Per $\alpha = 2$, effettuando la sostituzione $y = x^2$, da cui $2x\,dx = dy$, otteniamo

$$\int (x^3 + 3x)\sin(2x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + 3)\sin(2x^2)\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int (y + 3)\sin(2y)\,dy =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{y\cos(2y)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2y)\,dy - \frac{3\cos(2y)}{2} + C\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{y\cos(2y)}{2} + \frac{1}{4}\sin(2y) - \frac{3\cos(2y)}{2} + C\right) =$$

$$-\frac{x^2\cos(2x^2)}{4} + \frac{\sin(2x^2)}{8} - \frac{3\cos(2x^2)}{4} + C\,.$$

Invece, tenendo conto che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α è dispari (cioè $f_\alpha(x) = -f_\alpha(-x)$) e l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine, si ricava subito che l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea.

Consideriamo dapprima il caso $\alpha \neq -1$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4(\alpha + 1) = 0$ che ha per soluzioni

$$\lambda^2 = 4(\alpha + 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = \pm 2\sqrt{\alpha + 1} & \text{se } \alpha > -1, \\ \lambda = \pm 2\sqrt{-\alpha - 1}\,i & \text{se } \alpha < -1. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\begin{aligned} y_0(x) &= C_1 e^{2x\sqrt{\alpha+1}} + C_2 e^{-2x\sqrt{\alpha+1}} && \text{se } \alpha > -1, \\ y_0(x) &= C_1\cos(2x\sqrt{-\alpha - 1}) + C_2\sin(2x\sqrt{-\alpha - 1}) && \text{se } \alpha < -1. \end{aligned}$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza che fornisce $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa e ricordando il principio di identità dei polinomi, ricaviamo $2A - 4(\alpha + 1)(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 1$, da cui

$$\begin{cases} -4(\alpha + 1)A = 2\,, \\ -4(\alpha + 1)B = 0\,, \\ 2A - 4(\alpha + 1)C = 1\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A = -\frac{1}{2(\alpha + 1)}\,, \quad B = 0\,, \quad C = -\frac{\alpha + 2}{4(\alpha + 1)^2}\,.$$

Quindi l'integrale generale è dato da

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{2x\sqrt{\alpha+1}} + C_2 e^{-2x\sqrt{\alpha+1}} - \frac{1}{2(\alpha + 1)}x^2 - \frac{\alpha + 2}{4(\alpha + 1)^2} && \text{se } \alpha > -1, \\ y(x) &= C_1\cos(2x\sqrt{-\alpha - 1}) + C_2\sin(2x\sqrt{-\alpha - 1}) - \frac{1}{2(\alpha + 1)}x^2 - \frac{\alpha + 2}{4(\alpha + 1)^2} && \text{se } \alpha < -1. \end{aligned}$$

Invece per $\alpha = -1$, l'equazione differenziale si riduce a $y''(x) = 2x^2 + 1$, da cui, integrando due volte, otteniamo che l'integrale generale è dato da $y(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$.

Esercizio 4

Per determinare gli estremanti di f studiamone la monotonia attraverso la derivata. Da ciò ricaviamo

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}\log x(\log x + 1) - \frac{1}{x}(\log^2 x + 2)}{(\log x + 1)^2} = \frac{1}{x(\log x + 1)^2}(\log^2 x + 2\log x - 2)\,.$$

Quindi il segno della derivata è determinato dal segno del fattore $\log^2 x + 2\log x - 2$ il quale, con il cambio di variabile $t = \log x$, si trasforma nel trinomio di secondo grado $t^2 + 2t - 2$. Tale trinomio si annulla per $t = -1 \pm \sqrt{3}$, ovvero $x = \mathrm{e}^{-1\pm\sqrt{3}}$, ma l'unica radice ammissibile è $x = \mathrm{e}^{-1+\sqrt{3}} \in [\sqrt{\mathrm{e}}, \mathrm{e}]$. Pertanto, otteniamo

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > \mathrm{e}^{-1+\sqrt{3}}, \\ = 0 & \text{se } x = \mathrm{e}^{-1+\sqrt{3}}, \\ < 0 & \text{se } x < \mathrm{e}^{-1+\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Quindi $x = \mathrm{e}^{-1+\sqrt{3}}$ è punto di minimo assoluto, mentre gli estremi dell'intervallo, cioè i punti $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ e $x = \mathrm{e}$, sono punti di massimo relativo. Per stabilire quale dei due sia anche punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione agli estremi, ottenendo $f(\sqrt{\mathrm{e}}) = 3/2 = f(\mathrm{e})$. Pertanto, entrambi i punti $x = \mathrm{e}$ e $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ sono punti di massimo assoluto. Concludiamo osservando che la funzione proposta è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[\sqrt{\mathrm{e}}, \mathrm{e}]$, pertanto l'esistenza di estremanti assoluti è garantita dal Teorema di Weierstrass.

Esercizio 5

Osserviamo che le affermazioni $B)$ e $C)$ sono false; infatti, prendendo $a_n = b_n = \frac{1}{n^4} = o(1/n^2)$, si ottiene che la serie $\sum \sqrt{b_n} = \sum \frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum n^2 a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ sono entrambe convergenti. Invece, le affermazioni $A)$ e $D)$ sono corrette. Infatti, poiché $a_n \sim b_n$, si ottiene che $\frac{b_n}{a_n} \to 1 \neq 0$, quindi la condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta e la serie $\sum \frac{b_n}{a_n}$ diverge, mentre $\sqrt{a_n b_n} \sim \sqrt{(b_n)^2} = b_n = o(1/n^2)$, cioè $\frac{\sqrt{a_n b_n}}{1/n^2} \to 0$, quindi $\sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\sqrt{a_n b_n}}{1/n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum \sqrt{a_n b_n}$ converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è una serie a termini non negativi. Applicando il criterio della radice, dopo aver messo in evidenza il termine dominante, otteniamo

$$a_n := \frac{|3e^x - 8|^n}{4n^x + 5} \sim \frac{|3e^x - 8|^n}{4n^x} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{\frac{|3e^x - 8|^n}{4n^x}} = \frac{|3e^x - 8|}{\sqrt[n]{4}(\sqrt[n]{n})^x} \to |3e^x - 8|\,.$$

Quindi la serie converge per $|3e^x - 8| < 1$, cioè $-1 < 3e^x - 8 < 1$, che fornisce

$$\begin{cases} 3e^x < 9 \\ 3e^x > 7 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} e^x < 3 \\ e^x > 7/3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \log(7/3) < x < \log 3\,;$$

mentre diverge per $x < \log(7/3)$ oppure $x > \log 3$. Infine, per $\widetilde{x} = \log(7/3)$, $a_n = 1/(4n^{\widetilde{x}} + 5) \sim 1/(4n^{\widetilde{x}})$ che diverge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\widetilde{x} = \log(7/3) < 1$, mentre per $\widehat{x} = \log 3$, $a_n = 1/(4n^{\widehat{x}} + 5) \sim 1/(4n^{\widehat{x}})$ che converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\widehat{x} = \log 3 > 1$.

Esercizio 2

Per $\alpha = 3$, effettuando la sostituzione $y = x^2$, da cui $2x\,dx = dy$, otteniamo

$$\int (3x^3 + x)\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int (3x^2 + 1)\sin(x^2)\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int (3y + 1)\sin y\,dy =$$
$$\frac{1}{2}\left(-3y\cos y + 3\int \cos y\,dy - \cos y + C\right) = \frac{1}{2}\left(-3y\cos y + 3\sin y - \cos y + C\right) =$$
$$-\frac{3x^2\cos(x^2)}{2} + \frac{3\sin(x^2)}{2} - \frac{\cos(x^2)}{2} + C\,.$$

Invece, tenendo conto che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α è dispari (cioè $f_\alpha(x) = -f_\alpha(-x)$) e l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine, si ricava subito che l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea.

Consideriamo dapprima il caso $\alpha \neq -1/2$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 9(2\alpha + 1) = 0$ che ha per soluzioni

$$\lambda^2 = \frac{9(2\alpha + 1)}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = \pm 3\sqrt{2\alpha + 1}/2 & \text{se } \alpha > -1/2, \\ \lambda = \pm 3\sqrt{-2\alpha - 1}\,i/2 & \text{se } \alpha < -1/2. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = C_1 e^{3x\sqrt{2\alpha+1}/2} + C_2 e^{-3x\sqrt{2\alpha+1}/2} \qquad \text{se } \alpha > -1/2,$$
$$y_0(x) = C_1\cos(3x\sqrt{-2\alpha - 1}/2) + C_2\sin(3x\sqrt{-2\alpha - 1}/2) \qquad \text{se } \alpha < -1/2.$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza che fornisce $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa e ricordando il principio di identità dei polinomi, ricaviamo $2A - 9(2\alpha + 1)(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 + 2$, da cui

$$\begin{cases} -9(2\alpha + 1)A = 4\,, \\ -9(2\alpha + 1)B = 0\,, \\ 8A - 9(2\alpha + 1)C = 2\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A = -\frac{4}{9(2\alpha + 1)}\,, \quad B = 0\,, \quad C = -\frac{36\alpha + 50}{81(2\alpha + 1)^2}\,.$$

Quindi l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{3x\sqrt{2\alpha+1}/2} + C_2 e^{-3x\sqrt{2\alpha+1}/2} - \frac{4}{9(2\alpha + 1)}x^2 - \frac{36\alpha + 50}{81(2\alpha + 1)^2} \qquad \text{se } \alpha > -1/2,$$
$$y(x) = C_1\cos(3x\sqrt{-2\alpha - 1}/2) + C_2\sin(3x\sqrt{-2\alpha - 1}/2) - \frac{4}{9(2\alpha + 1)}x^2 - \frac{36\alpha + 50}{81(2\alpha + 1)^2} \qquad \text{se } \alpha < -1/2.$$

Invece per $\alpha = -1/2$, l'equazione differenziale si riduce a $y''(x) = 4x^2 + 2$, da cui, integrando due volte, otteniamo che l'integrale generale è dato da $y(x) = \frac{x^4}{12} + x^4 + C_1 x + C_2$.

Esercizio 4

Per determinare gli estremanti di f studiamone la monotonia attraverso la derivata. Da ciò ricaviamo

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{x}(\log^2 x + 2) - \frac{2}{x}\log x(3\log x + 1)}{(\log^2 x + 2)^2} = -\frac{1}{x(\log^2 x + 2)^2}(3\log^2 x + 2\log x - 6)\,.$$

Quindi il segno della derivata è determinato dal segno del fattore $-(3\log^2 x + 2\log x - 6)$ il quale, con il cambio di variabile $t = \log x$, si trasforma nel trinomio di secondo grado $-(3t^2 + 2t - 6)$. Tale trinomio si annulla per $t = \frac{-1\pm\sqrt{19}}{3}$, ovvero $x = \mathrm{e}^{\frac{-1\pm\sqrt{19}}{3}}$, ma l'unica radice ammissibile è $x = \mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{19}}{3}} \in [\mathrm{e}, \mathrm{e}^3]$. Pertanto, otteniamo

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & \text{se } x > \mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{19}}{3}}, \\ = 0 & \text{se } x = \mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{19}}{3}}, \\ > 0 & \text{se } x < \mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{19}}{3}}. \end{cases}$$

Quindi $x = \mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{19}}{3}}$ è punto di massimo assoluto, mentre gli estremi dell'intervallo, cioè i punti $x = \mathrm{e}$ e $x = \mathrm{e}^3$, sono punti di minimo relativo. Per stabilire quale dei due sia anche punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione agli estremi, ottenendo $f(\mathrm{e}) = 4/3$ ed $f(\mathrm{e}^3) = 10/11$. Pertanto, $x = \mathrm{e}^3$ è punto di minimo assoluto, mentre $x = \mathrm{e}$ è punto di minimo relativo. Concludiamo osservando che la funzione proposta è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[\mathrm{e}, \mathrm{e}^3]$, pertanto l'esistenza di estremanti assoluti è garantita dal Teorema di Weierstrass.

Esercizio 5

Osserviamo che le affermazioni $A)$ e $D)$ sono false; infatti, prendendo $a_n = b_n = \frac{1}{n^4} = o(1/n^2)$, si ottiene che la serie $\sum\sqrt{b_n} = \sum\frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum n^2 a_n = \sum\frac{1}{n^2}$ sono entrambe convergenti. Invece, le affermazioni $B)$ e $C)$ sono corrette. Infatti, poiché $a_n \sim b_n$, si ottiene che $\frac{b_n}{a_n} \to 1 \neq 0$, quindi la condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta e la serie $\sum\frac{b_n}{a_n}$ diverge, mentre $\sqrt{a_n b_n} \sim \sqrt{(b_n)^2} = b_n = o(1/n^2)$, cioè $\frac{\sqrt{a_n b_n}}{1/n^2} \to 0$, quindi $\sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\sqrt{a_n b_n}}{1/n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum\sqrt{a_n b_n}$ converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è una serie a termini non negativi. Applicando il criterio della radice, dopo aver messo in evidenza il termine dominante, otteniamo

$$a_n := \frac{|3\log x + \frac{1}{3}|^n}{2n^x + 3} \sim \frac{|3\log x + \frac{1}{3}|^n}{2n^x} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{\frac{|3\log x + \frac{1}{3}|^n}{2n^x}} = \frac{|3\log x + \frac{1}{3}|}{\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^x} \to |3\log x + \frac{1}{3}|\,.$$

Quindi la serie converge per $|3\log x + \frac{1}{3}| < 1$, cioè $-1 < 3\log x + \frac{1}{3} < 1$, che fornisce

$$\begin{cases} 3\log x < 2/3 \\ 3\log x > -4/3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \log x < 2/9 \\ \log x > -4/9 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-4/9} < x < e^{2/9}\,;$$

mentre diverge per $x < e^{-4/9}$ oppure $x > e^{2/9}$. Infine, per $\widetilde{x} = e^{-4/9}$, $a_n = 1/(2n^{\tilde{x}} + 3) \sim 1/(2n^{\tilde{x}})$ che diverge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\widetilde{x} = e^{-4/9} < 1$, mentre per $\widehat{x} = e^{2/9}$, $a_n = 1/(2n^{\hat{x}} + 3) \sim 1/(2n^{\hat{x}})$ che converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\widehat{x} = e^{2/9} > 1$.

Esercizio 2

Per $\alpha = 0$, effettuando la sostituzione $y = x^2$, da cui $2x\,dx = dy$, otteniamo

$$\int (2x^3 + x)e^{x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x^2+1)e^{x^2/2} 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (2y+1)e^{y/2}\,dy =$$
$$\frac{1}{2}\left(4ye^{y/2} - 4\int e^{y/2}\,dy + 2e^{y/2} + C\right) = \frac{1}{2}\left(4ye^{y/2} - 8e^{y/2} + 2e^{y/2} + C\right) = e^{x^2/2}\left(2x^2 - 3\right) + C\,.$$

Invece, tenendo conto che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α è dispari (cioè $f_\alpha(x) = -f_\alpha(-x)$) e l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine, si ricava subito che l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea.

Consideriamo dapprima il caso $\alpha \neq 1/2$. L'equazione caratteristica associata è $9\lambda^2 + (2\alpha - 1) = 0$ che ha per soluzioni

$$\lambda^2 = \frac{1 - 2\alpha}{9} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{1-2\alpha}}{3} & \text{se } \alpha < 1/2, \\ \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{2\alpha - 1}}{3}\,i & \text{se } \alpha > 1/2. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\begin{aligned} y_0(x) &= C_1 e^{x\sqrt{1-2\alpha}/3} + C_2 e^{-x\sqrt{1-2\alpha}/3} && \text{se } \alpha < 1/2, \\ y_0(x) &= C_1\cos(x\sqrt{2\alpha-1}/3) + C_2\sin(x\sqrt{2\alpha-1}/3) && \text{se } \alpha > 1/2. \end{aligned}$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza che fornisce $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa e ricordando il principio di identità dei polinomi, ricaviamo $18A + (2\alpha - 1)(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$, da cui

$$\begin{cases} (2\alpha - 1)A = 4\,, \\ (2\alpha - 1)B = 0\,, \\ 18A + (2\alpha - 1)C = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{4}{2\alpha - 1}\,,\quad B = 0\,,\quad C = -\frac{72}{(2\alpha - 1)^2}\,.$$

Quindi l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x\sqrt{1-2\alpha}/3} + C_2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{1-2\alpha}/3} + \frac{4}{2\alpha-1}x^2 - \frac{72}{(2\alpha-1)^2} \qquad \text{se } \alpha < 1/2,$$

$$y(x) = C_1 \cos(x\sqrt{2\alpha-1}/3) + C_2 \sin(x\sqrt{2\alpha-1}/3) + \frac{4}{2\alpha-1}x^2 - \frac{72}{(2\alpha-1)^2} \qquad \text{se } \alpha > 1/2.$$

Invece per $\alpha = 1/2$, l'equazione differenziale si riduce a $y''(x) = 4x^2/9$, da cui, integrando due volte, otteniamo che l'integrale generale è dato da $y(x) = \frac{x^4}{27} + C_1 x + C_2$.

Esercizio 4

Per determinare gli estremanti di f studiamone la monotonia attraverso la derivata. Da ciò ricaviamo

$$f'(x) = \frac{3\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{2x}+3) - 2\mathrm{e}^{2x}(3\mathrm{e}^x+2)}{(\mathrm{e}^{2x}+3)^2} = -\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{2x}+3)^2}(3\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x-9)\,.$$

Quindi il segno della derivata è determinato dal segno del fattore $-(3\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x-9)$ il quale, con il cambio di variabile $t = \mathrm{e}^x$, si trasforma nel trinomio di secondo grado $-(3t^2+4t-9)$. Tale trinomio si annulla per $t = \frac{-2\pm\sqrt{31}}{3}$, ma essendo $t = \mathrm{e}^x$, l'unica radice ammissibile è quella positiva, data da $t = \frac{-2+\sqrt{31}}{3}$, ovvero $x = \log\left(\frac{-2+\sqrt{31}}{3}\right) \in [\log(1/2), \log 3]$. Pertanto, otteniamo

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x > \log\left(\frac{-2+\sqrt{31}}{3}\right), \\ = 0 & \text{se } x = \log\left(\frac{-2+\sqrt{31}}{3}\right), \\ > 0 & \text{se } x < \log\left(\frac{-2+\sqrt{31}}{3}\right). \end{cases}$$

Quindi $x = \log\left(\frac{-2+\sqrt{31}}{3}\right)$ è punto di massimo assoluto, mentre gli estremi dell'intervallo, cioè i punti $x = \log(3/2)$ e $x = \log 3$, sono punti di minimo relativo. Per stabilire quale dei due sia anche punto di minimo assoluto, valutiamo la funzione agli estremi, ottenendo $f(\log(1/2)) = 14/13$ ed $f(\log 3) = 11/12$. Pertanto, $x = \log 3$ è punto di minimo assoluto, mentre $x = \log(1/2)$ è punto di minimo relativo. Concludiamo osservando che la funzione proposta è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[\log(1/2), \log 3]$, pertanto l'esistenza di estremanti assoluti è garantita dal Teorema di Weierstrass.

Esercizio 5

Osserviamo che le affermazioni $B)$ e $C)$ sono false; infatti, prendendo $a_n = b_n = \frac{1}{n^3} = o(1/n)$, si ottiene che la serie $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^3}$ e la serie $\sum n b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ sono entrambe convergenti. Invece, le affermazioni $A)$ e $D)$ sono corrette. Infatti, poiché $a_n \sim b_n$, si ottiene che $\frac{a_n}{b_n} \to 1 \neq 0$, quindi la condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta e la serie $\sum \frac{a_n}{b_n}$ diverge, mentre $a_n b_n \sim (a_n)^2 = o(1/n^2)$, cioè $\frac{a_n b_n}{1/n^2} \to 0$, quindi $a_n b_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{a_n b_n}{1/n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum a_n b_n$ converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.