SOLUZIONI COMPITO del 04/03/2011
ANALISI 1 - MECCANICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Integrando per parti ed in seguito sostituendo $t = \mathrm{e}^x$, da cui $dx = \frac{1}{t}\,dt$, $t(0) = 1$, $t(n) = \mathrm{e}^n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$
\begin{aligned}
I_n &= -x\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\Big|_0^n + \int_0^n \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,dx = -n\frac{1}{\mathrm{e}^n+1} + \int_1^{\mathrm{e}^n} \frac{1}{t+1}\,\frac{1}{t}\,dt \\
&= -n\frac{1}{\mathrm{e}^n+1} - \int_1^{\mathrm{e}^n} \frac{1}{t+1}\,dt + \int_1^{\mathrm{e}^n} \frac{1}{t}\,dt = -n\frac{1}{\mathrm{e}^n+1} - \log(t+1)\Big|_1^{\mathrm{e}^n} + \log t\Big|_1^{\mathrm{e}^n} \\
&= -n\frac{1}{\mathrm{e}^n+1} + \log\left(\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n+1}\right) + \log 2\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, tenendo conto degli ordini di infinito, si ricava

$$
\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\left[-n\frac{1}{\mathrm{e}^n+1} + \log\left(\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n+1}\right) + \log 2\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{n}{\mathrm{e}^n} + \log\left(\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n}\right)\right] + \log 2 = \log 2\,.
$$

Esercizio 2

Ponendo $z = x + iy$ l'equazione proposta diventa

$$
\mathrm{e}^x|\mathrm{e}^{ix-y}| = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x - y < 0\,.
$$

Nel piano complesso, le soluzioni costituiscono il semipiano che si trova al di sopra della bisettrice $y = x$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. L'equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2+4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2i$; quindi la soluzione dell'equazione omogenea sarà data da $y_0(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$. Dal metodo di somiglianza otteniamo, invece, che la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa, si ottiene

$$
2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 4A = 1\,, \\ 4B = 0\,, \\ 2A + 4C = 0\,, \end{cases}
$$

ovvero $y_p(x) = x^2/4 - 1/8$. Pertanto, l'integrale generale sarà della forma

$$
y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + x^2/4 - 1/8\,.
$$

Imponendo le condizioni richieste, si ricava

$$
\begin{array}{l} y(0) = C_1 - 1/8 \\ y(\pi/4) = C_1\cos(\pi/2) + C_2\sin(\pi/2) + \pi^2/64 - 1/8 = C_2 + \pi^2/64 - 1/8 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = C_2 + \pi^2/64\,.
$$

Il problema proposto (che non è un problema di Cauchy) ha, quindi, infinite soluzioni della forma

$$
y(x) = (C_2 + \pi^2/64)\cos(2x) + C_2\sin(2x) + x^2/4 - 1/8\,, \qquad \forall C_2 \in \mathbb{R}\,.
$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt[3]{1+t}$ con $t = 1/n^{\alpha^2}$, $\alpha \neq 0$, otteniamo

$$\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^{\alpha^2}}}-1\right)^{\alpha+2}}{n} \sim \frac{\left(\frac{1}{3n^{\alpha^2}}\right)^{\alpha+2}}{n} = \frac{1}{3^{\alpha+2}n^{\alpha^3+2\alpha^2+1}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie proposta convergerà se e solo se

$$\alpha^3+2\alpha^2+1>1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2(\alpha+2)>0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha>-2 \quad \alpha\neq 0\,.$$

Per $\alpha = 0$ si ottiene, a meno di una costante moltiplicativa, la serie armonica che diverge.

Esercizio 5

Le affermazioni a) e b) sono false, basta considerare la funzione $f(x) = x^4$ che, pur soddisfacendo le ipotesi, ha in $x = 0$ un punto di minimo assoluto (e non un flesso) ed è un infinitesimo di ordine 4 per $x \to 0$.
L'affermazione c) è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = x^3$, che soddisfa le ipotesi ed ha in $x = 0$ un punto di flesso (e non un estremante).
L'affermazione d) è l'unica corretta, in quanto lo sviluppo di Mc Laurin di f al secondo ordine in $x = 0$ (ammissibile poiché $f \in \mathcal{C}^2$) fornisce proprio

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = o(x^2)\,,$$

ove abbiamo tenuto conto dell'ipotesi $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

Esercizio 6

Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate in $(0, 0)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2+x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin^2\theta+\rho^3\cos^3\theta\cdot\rho\sin\theta}{\sqrt{\rho^2}} \\ &= \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3(\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta\rho\sin\theta)}{\rho} = 0\,,\end{aligned}$$

indipendentemente da θ, poiché $|\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta\rho\sin\theta| \le 1 + \rho \le 2$, per $\rho \to 0^+$.

TEMA B

Esercizio 1

Integrando per parti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)\Big|_{1/n}^{1} + \int_{1/n}^{1}\frac{1}{x^2}\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx = n^2\log(1+1/n^2) - \log 2 + 2\int_{1/n}^{1}\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx \\ &= n^2\log(1+1/n^2) - \log 2 + 2\int_{1/n}^{1}\frac{1}{x}\,dt - 2\int_{1/n}^{1}\frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= n^2\log(1+1/n^2) - \log 2 + 2\log x\Big|_{1/n}^{1} - \log(1+x^2)\Big|_{1/n}^{1} \\ &= n^2\log(1+1/n^2) - \log 2 - 2\log(1/n) + \log(1+1/n^2) - \log 2\,. \end{aligned}$$

Pertanto, tenendo conto degli ordini di infinito ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/n^2$, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\big[(n^2+1)\log(1+1/n^2) - 2\log(1/n) - 2\log 2\big] = \lim_{n\to+\infty}\left[n^2\,\frac{1}{n^2} + 2\log n\right] - 2\log 2 = +\infty\,.$$

Esercizio 2

Ponendo $z = x + iy$ l'equazione proposta diventa

$$|\mathrm{e}^{y/(x+iy)}| = |\mathrm{e}^{(yx-iy^2)/(x^2+y^2)}| = \mathrm{e}^{xy/(x^2+y^2)} > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad xy > 0\,.$$

Nel piano complesso, le soluzioni costituiscono i punti interni al primo e al terzo quadrante, cioè dove parte reale e immaginaria sono entrambe $\neq 0$ e concordi.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. L'equazione caratteristica associata è data da $4\lambda^2 - 1 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 1/2$; quindi la soluzione dell'equazione omogenea sarà data da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{x/2} + C_2\mathrm{e}^{-x/2}$. Dal metodo di somiglianza otteniamo, invece, che la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa, si ottiene

$$8A - Ax^2 - Bx - C = 3x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} -A = 3\,, \\ -B = 0\,, \\ 8A - C = 0\,, \end{cases}$$

ovvero $y_p(x) = -3x^2 - 24$. Pertanto, l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{x/2} + C_2\mathrm{e}^{-x/2} - 3x^2 - 24\,.$$

Imponendo le condizioni richieste, si ricava

$$\begin{aligned} y(1) &= C_1\mathrm{e}^{1/2} + C_2\mathrm{e}^{-1/2} - 3 - 24 \\ y(-1) &= C_1\mathrm{e}^{-1/2} + C_2\mathrm{e}^{1/2} - 3 - 24 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1[\mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^{-1/2}] = C_2[\mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^{-1/2}] \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = C_2\,.$$

Il problema proposto (che non è un problema di Cauchy) ha, quindi, infinite soluzioni della forma

$$y(x) = C_1[\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2}] - 3x^2 - 24\,, \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 4
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt[5]{1+t}$ con $t = 1/n$, otteniamo

$$\frac{n^{\alpha-1}}{\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1\right)^{\alpha^2}} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{5n}\right)^{\alpha^2}} = \frac{5^{\alpha^2}}{n^{-\alpha^2-\alpha+1}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie proposta convergerà se e solo se

$$-\alpha^2-\alpha+1>1 \qquad \Longrightarrow \qquad -\alpha(\alpha+1)>0 \qquad \Longrightarrow \qquad -1<\alpha<0\,.$$

Esercizio 5
L'affermazione a) è corretta poiché la retta tangente al grafico di f in $x = 0$ è data dall'equazione $y = f(0) + f'(0)x = 0$, che rappresenta una retta orizzontale, come la retta $y = 5$.
Le affermazioni b) e c) sono false, basta considerare la funzione $f(x) = x^3$ che, pur soddisfacendo le ipotesi, ha in $x = 0$ un punto di flesso (e non un estremante) ed inoltre ha ordine di infinitesimo pari a 3 per $x \to 0^+$.
L'affermazione d) è anch'essa corretta, in quanto lo sviluppo di Mc Laurin di f al primo ordine in $x = 0$ (ammissibile poiché $f \in \mathcal{C}^1$) fornisce proprio

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = o(x)\,,$$

ove abbiamo tenuto conto dell'ipotesi $f(0) = f'(0) = 0$.

Esercizio 6
Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate in $(0,0)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2+x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin^2\theta+\rho^3\cos^3\theta\cdot\rho\sin\theta}{\sqrt{\rho^2}} \\ &= \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3(\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta\rho\sin\theta)}{\rho} = 0\,,\end{aligned}$$

indipendentemente da θ, poiché $|\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta\rho\sin\theta| \le 1+\rho \le 2$, per $\rho \to 0^+$.

TEMA C

Esercizio 1

Integrando per parti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{x}\log(1+x)\Big|_{1/n}^{1} + \int_{1/n}^{1} \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x}\,dx = n\log(1+1/n) - \log 2 + \int_{1/n}^{1} \frac{1}{x}\,dt - \int_{1/n}^{1} \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= n\log(1+1/n) - \log 2 + \log x\Big|_{1/n}^{1} - \log(1+x)\Big|_{1/n}^{1} \\ &= n\log(1+1/n) - \log 2 - \log(1/n) + \log(1+1/n) - \log 2\,. \end{aligned}$$

Pertanto, tenendo conto degli ordini di infinito ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/n$, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} [(n+1)\log(1+1/n) - \log(1/n) - 2\log 2] = \lim_{n\to+\infty} \left[n\,\frac{1}{n} + \log n\right] - 2\log 2 = +\infty\,.$$

Esercizio 2

Ponendo $z = x + iy$ l'equazione proposta diventa

$$\begin{aligned} &|\mathrm{e}^{i(y+1)/(x+iy)}| = |\mathrm{e}^{[i(y+1)x+(y+1)y]/(x^2+y^2)}| = \mathrm{e}^{(y+1)y/(x^2+y^2)} > \mathrm{e} \\ \Longrightarrow \quad &(y^2+y)/(x^2+y^2) > 1 \quad \Longrightarrow \quad y > x^2\,. \end{aligned}$$

Nel piano complesso, le soluzioni costituiscono i punti del piano che si trovano al di sopra della parabola di equazione $y = x^2$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. L'equazione caratteristica associata è data da $2\lambda^2 - 1 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$; quindi la soluzione dell'equazione omogenea sarà data da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{x/\sqrt{2}} + C_2\mathrm{e}^{-x/\sqrt{2}}$. Dal metodo di somiglianza otteniamo, invece, che la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa, si ottiene

$$4A - Ax^2 - Bx - C = x^2/4 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} -A = 1/4\,, \\ -B = 0\,, \\ 4A - C = 0\,, \end{cases}$$

ovvero $y_p(x) = -x^2/4 - 1$. Pertanto, l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{x/\sqrt{2}} + C_2\mathrm{e}^{-x/\sqrt{2}} - x^2/4 - 1\,.$$

Imponendo le condizioni richieste, si ricava

$$\begin{matrix} y(1) = C_1\mathrm{e} + C_2\mathrm{e}^{-1} - 1/2 - 1 \\ y(-1) = C_1\mathrm{e}^{-1} + C_2\mathrm{e} - 1/2 - 1 \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1[\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}] = C_2[\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}] \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = C_2\,.$$

Il problema proposto (che non è un problema di Cauchy) ha, quindi, infinite soluzioni della forma

$$y(x) = C_1[\mathrm{e}^{x/\sqrt{2}} + \mathrm{e}^{-x/\sqrt{2}}] - x^2/4 - 1\,, \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt[6]{1+t}$ con $t = 1/n$, otteniamo

$$\frac{n^{2\alpha}}{\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{n}}-1\right)^{\alpha^2-1}} \sim \frac{n^{2\alpha}}{\left(\frac{1}{6n}\right)^{\alpha^2-1}} = \frac{6^{\alpha^2-1}}{n^{-\alpha^2-2\alpha+1}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie proposta convergerà se e solo se

$$-\alpha^2 - 2\alpha + 1 > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad -\alpha(\alpha+2) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -2 < \alpha < 0\,.$$

Esercizio 5

Le affermazioni a) e d) sono false, basta considerare la funzione $f(x) = x^3$ che, pur soddisfacendo le ipotesi, ha in $x = 0$ un punto di flesso (e non un estremante) ed inoltre ha ordine di infinitesimo pari a 3 per $x \to 0^+$.
L'affermazione b) è corretta poiché la retta tangente al grafico di f in $x = 0$ è data dall'equazione $y = f(0) + f'(0)x = 0$, che rappresenta una retta orizzontale, come la retta $y = 5$.
L'affermazione c) è anch'essa corretta, in quanto lo sviluppo di Mc Laurin di f al primo ordine in $x = 0$ (ammissibile poiché $f \in \mathcal{C}^1$) fornisce proprio

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = o(x)\,,$$

ove abbiamo tenuto conto dell'ipotesi $f(0) = f'(0) = 0$.

Esercizio 6

Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate in $(0, 0)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 + x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin^2\theta + \rho^3\cos^3\theta\cdot\rho\sin\theta}{\sqrt{\rho^2}} \\ &= \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3(\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta\rho\sin\theta)}{\rho} = 0\,,\end{aligned}$$

indipendentemente da θ, poiché $|\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta\rho\sin\theta| \leq 1 + \rho \leq 2$, per $\rho \to 0^+$.

TEMA D

Esercizio 1

Integrando per parti ed in seguito sostituendo $t = e^{2x}$, da cui $dx = \frac{1}{2t}\,dt$, $t(0) = 1$, $t(n) = e^{2n}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
I_n &= -x\frac{1}{2(e^{2x}+1)}\Big|_0^n + \frac{1}{2}\int_0^n \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = -n\frac{1}{2(e^{2n}+1)} + \frac{1}{2}\int_1^{e^{2n}} \frac{1}{t+1}\,\frac{1}{2t}\,dt \\
&= -n\frac{1}{2(e^{2n}+1)} - \frac{1}{4}\int_1^{e^{2n}} \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{4}\int_1^{e^{2n}} \frac{1}{t}\,dt = -n\frac{1}{2(e^{2n}+1)} - \frac{1}{4}\log(t+1)\Big|_1^{e^{2n}} + \frac{1}{4}\log t\Big|_1^{e^{2n}} \\
&= -n\frac{1}{2(e^{2n}+1)} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{e^{2n}}{e^{2n}+1}\right) + \frac{1}{4}\log 2\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, tenendo conto degli ordini di infinito, si ricava

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} I_n &= \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{n}{2(e^{2n}+1)} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{e^{2n}}{e^{2n}+1}\right) + \frac{1}{4}\log 2\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{n}{2e^{2n}} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{e^{2n}}{e^{2n}}\right)\right] + \frac{1}{4}\log 2 = \frac{1}{4}\log 2\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Ponendo $z = x + iy$ l'equazione proposta diventa

$$e^x|e^{2ix-2y}| = e^x e^{-2y} < e \qquad \Longrightarrow \qquad x - 2y < 1\,.$$

Nel piano complesso, le soluzioni costituiscono il semipiano che si trova al di sopra della retta di equazione $y = (x-1)/2$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. L'equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2+9=0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 3i$; quindi la soluzione dell'equazione omogenea sarà data da $y_0(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$. Dal metodo di somiglianza otteniamo, invece, che la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa, si ottiene

$$2A + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 5x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 9A = 5\,, \\ 9B = 0\,, \\ 2A + 9C = 0\,, \end{cases}$$

ovvero $y_p(x) = 5x^2/9 - 10/81$. Pertanto, l'integrale generale sarà della forma

$$y(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + 5x^2/9 - 10/81\,.$$

Imponendo le condizioni richieste, si ricava

$$\begin{aligned}
&y(0) = C_1 - 10/81 \\
&y(\pi/6) = C_1\cos(\pi/2) + C_2\sin(\pi/2) + 5\pi^2/324 - 10/81 = C_2 + 5\pi^2/324 - 10/81
\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = C_2 + 5\pi^2/324\,.$$

Il problema proposto (che non è un problema di Cauchy) ha, quindi, infinite soluzioni della forma

$$y(x) = (C_2 + 5\pi^2/324)\cos(3x) + C_2\sin(3x) + 5x^2/9 - 10/81 \qquad \forall C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 4
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt[4]{1+t}$ con $t = 1/n^{\alpha^2+4}$, otteniamo

$$\frac{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^{\alpha^2+4}}}-1\right)^{\alpha}}{n} \sim \frac{\left(\frac{1}{4n^{\alpha^2+4}}\right)^{\alpha}}{n} = \frac{1}{4^{\alpha}n^{\alpha^3+4\alpha+1}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie proposta convergerà se e solo se

$$\alpha^3+4\alpha+1>1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(\alpha^2+4)>0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha>0\,.$$

Esercizio 5
Le affermazioni a) e b) sono false, basta considerare la funzione $f(x) = x^3$ che, pur soddisfacendo le ipotesi, ha in $x = 0$ un punto di flesso (e non un estremante) ed è un infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0$.
L'affermazione c) è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = x^4$, che soddisfa le ipotesi ed ha in $x = 0$ un punto di minimo assoluto (e non un flesso).

L'affermazione d) è l'unica corretta, in quanto lo sviluppo di Mc Laurin di f al secondo ordine in $x = 0$ (ammissibile poiché $f \in \mathcal{C}^2$) fornisce proprio

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = o(x^2)\,,$$

ove abbiamo tenuto conto dell'ipotesi $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

Esercizio 6
Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate in $(0,0)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2+x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin^2\theta+\rho^3\cos^3\theta\cdot\rho\sin\theta}{\sqrt{\rho^2}} \\ &= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3(\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta\rho\sin\theta)}{\rho} = 0\,,\end{aligned}$$

indipendentemente da θ, poiché $|\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta\rho\sin\theta| \le 1+\rho \le 2$, per $\rho \to 0^+$.