SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

$$\text{C.E.} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \ ;$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (0,+\infty) \setminus \{1\} \ ; \qquad f(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^- \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ ;$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty \ ; \qquad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = +\infty \ ;$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x[2x^2-5x+2]}{2x^2(x-1)^{3/2}} & \text{se } x > 1; \\ -\frac{\mathrm{e}^x[2x^2-5x+2]}{2x^2(1-x)^{3/2}} & \text{se } x \in (-\infty,0)\cup(0,1); \end{cases}$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (1/2,1)\cup(2,+\infty) \ ; \qquad f'(x) = 0 \quad x = 1/2, 2 \ ;$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty,0)\cup(0,1/2)\cup(1,2) \ .$$

La funzione assegnata non ha asintoti obliqui, i punti $x = 1/2$ e $x = 2$ sono punti di minimo. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, le rette $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali.

Esercizio 2

Osservando che

$$\left[\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha} - 1\right] n^4 \sim -\frac{n^4}{2(n+2)^{2\alpha}} \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha-4}} \ ,$$

si ottiene subito che la serie converge per $\alpha > 5/2$.

Esercizio 3

Effettuando il cambiamento di variabile $t = \mathrm{e}^{2x}$, si ottiene

$$\int_0^{(\log 2)/2} \mathrm{e}^{2x} \log(1+\mathrm{e}^{2x})\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \log(1+t)\, dt = \frac{1}{2}\left[t\log(1+t) - t + \log(1+t)\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(3\log 3 - 2\log 2 - 1) \ .$$

Esercizio 4

Osservando che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad f(0) = \alpha^2 \ ,$$

si ottiene che la funzione risulta continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha = \pm 1$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

C.E. $= I\!R \setminus \{-1, 0\}$;

$f(x) < 0 \;\; \forall x \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\}$; $\qquad f(x) > 0 \;\; \forall x \in (0, +\infty)$;

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$;

$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$; $\qquad \lim_{x \to -1^\pm} f(x) = -\infty$;

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{-x}[2x^2+5x+2]}{2x^2(x+1)^{3/2}} & \text{se } x \in (-1,0) \cup (0,+\infty); \\ \frac{e^{-x}[2x^2+5x+2]}{2x^2(-x-1)^{3/2}} & \text{se } x < -1; \end{cases}$$

$f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (-2, -1) \cup (-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$; $\qquad f'(x) = 0 \quad x = -2, -1/2$;

$f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (-\infty, -2) \cup (-1, -1/2)$.

La funzione assegnata non ha asintoti obliqui, i punti $x = -2$ e $x = -1/2$ sono punti di massimo. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, le rette $x = 0$ e $x = -1$ sono asintoti verticali.

Esercizio 2

Osservando che

$$\left[1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-\alpha}\right](n+2)^3 \sim \frac{(n+2)^3}{2(n+1)^{-2\alpha}} \sim \frac{1}{2n^{-2\alpha-3}} \; ,$$

si ottiene subito che la serie converge per $\alpha < -2$.

Esercizio 3

Effettuando il cambiamento di variabile $t = \sin x$, si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x) \log(1 + \sin x)\; dx = \int_0^1 \log(1+t)\; dt = [t\log(1+t) - t + \log(1+t)]\,\Big|_0^1 = 2\log 2 - 1 \; .$$

Esercizio 4

Osservando che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x^3}{\sin^3 x} = -1 \qquad \text{e} \qquad f(0) = -\alpha^2 \; ,$$

si ottiene che la funzione risulta continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha = \pm 1$.