ANALISI I (h. 2.30) Appello del **4 Luglio 2012**	**10 CFU - TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Energetica

1. Calcolare

$$\iint_E \log(x+1)\,dx\,dy\,,$$

dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$.

---

2. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin(2x^{2/3}) - \cos\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right) - 2x^{2/3}}{\log(1+x^{10/3})}\,.$$

---

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3y''(x) - 18y'(x) + 24y(x) = 12\mathrm{e}^{2x}\,, \\ y(0) = 1\,, \\ y'(0) = -2\,. \end{cases}$$

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \sin x\,.$$

Determinare gli eventuali estremanti relativi e assoluti in $[0, 2\pi]$.

---

5. Supponiamo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano due successioni di numeri positivi tali che $a_n \sim n^2$ e $b_n \sim \frac{1}{n}$. Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono corrette

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)$ converge; $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+a_n b_n}$ converge;

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n b_n}{1+b_n a_n}$ diverge; $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n b_n^2}{1+a_n^2 b_n}$ diverge.

Fornire un controesempio per quelle false.