SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x)y^2+(1+y^2)x^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{xy^2+y^2x^2}{x^2+y^2}\right) =$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \left(1+\frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta+\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2}\right) = \lim_{\rho\to 0^+} \left(1+\rho(\cos\theta\sin^2\theta+\rho\cos^2\theta\sin^2\theta)\right) = 1$$

indipendentemente da θ.

Esercizio 2

Tenendo conto che il dominio è un insieme y-semplice, dal teorema di riduzione degli integrali doppi otteniamo

$$\iint_E \frac{\cos x}{y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \cos x \left(\int_1^{1+\sin x} \frac{1}{y^2}\, dy\right) dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \left(-\frac{1}{y}\Big|_1^{1+\sin x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x \left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right) dx = [\sin x - \log(1+\sin x)]\Big|_0^{\pi/2} = 1-\log 2\,.$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili, che non ammette integrali singolari. Quindi, per determinare l'insieme delle soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\int \sqrt{y}\, dy = \int (4x^3+2x)\, dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2}{3}\,[y(x)]^{3/2} = x^4+x^2+C\,;$$

pertanto l'integrale generale sarà dato da

$$y(x) = \left[\frac{3}{2}\,(x^4+x^2+C)\right]^{2/3}.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$1 = y(0) = \left(\frac{3}{2}\,C\right)^{2/3} \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{2}{3}.$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy proposto è $y(x) = \left[\frac{3}{2}\,(x^4+x^2)+1\right]^{2/3}$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la *b*), poiché, per definizione, f è continua in $(1,2)$ se e solo se si ha

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = 3\,.$$

La risposta *a*) è falsa, in quanto, in generale, f potrebbe essere discontinua in $(1,2)$.
La risposta *c*) è falsa, in quanto, pur essendo derivabile, f potrebbe essere discontinua in $(1,2)$. Infatti, per le funzioni di due variabili, la derivabilità non implica la continuità.
La risposta *d*) è falsa, in quanto $f(\cdot,2)$ potrebbe essere discontinua in $(1,2)$, pur essendo monotona. In tal caso il limite proposto esisterebbe, ma potrebbe non coincidere con il valore 3.