CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) $\square$ ANALISI I (h. 2.30) $\square$ Appello del 5 febbraio 2010	**TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica $\square$ Elettrica $\square$

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{2n+5} \log\left(1+3\sin(1/n)\right) .$$

---

2. Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x)\, x \log x^2 , \\ y(1) = \lambda . \end{cases}$$

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \sin\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^{2-\alpha}}{\left[\exp\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) - 1\right]^{\alpha}}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $[1,+\infty)$.

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin^2 x - x - \sin x \cos x + 1 .$$

1) Determinarne i punti di massimo e minimo relativo di f in $[0, 2\pi]$.
2) Utilizzare i risultati del punto precedente per determinare quante soluzioni possiede l'equazione

$$\sin^2 x - x - \sin x \cos x + 1 = 0$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

5.

1) Determinare due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n, b_n \to +\infty$ e $\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\log n} \to +\infty$.
2) Determinare due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n, b_n \to +\infty$, $a_n \sim b_n$ e $\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\log n} \to +\infty$.

---

6. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \frac{\log(y-1-\mathrm{e}^x)}{\sqrt{4-x^2-(y-1)^2}} ,$$

determinare il suo insieme di definizione D .

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) $\square$ ANALISI I (h. 2.30) $\square$ Appello del 5 febbraio 2010	**TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica $\square$ Elettrica $\square$

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{5n^{3/2}+2} \sin\big(\log(1+4/\sqrt{n})\big) \, .$$

---

2. Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2\big(1+y(x)\big)^2 x\mathrm{e}^x \, , \\ y(0) = \lambda - 1 \, . \end{cases}$$

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{[x\sqrt[3]{x} - \log(1+x\sqrt[3]{x})]^{2\alpha}}{(\sin\sqrt{x})^{1-2\alpha}}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $(0,1]$.

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin x \cos x + x + 1 - \sin^2 x \, .$$

1) Determinarne i punti di massimo e minimo relativo di f in $[-2\pi, 0]$.
2) Utilizzare i risultati del punto precedente per determinare quante soluzioni possiede l'equazione

$$\sin x \cos x + x + 1 - \sin^2 x = 0$$

nell'intervallo $[-2\pi, 0]$.

5.

1) Determinare due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n, b_n \to +\infty$ e $\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\mathrm{e}^n} \to 0$.
2) Determinare due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n, b_n \to +\infty$, $a_n \sim b_n$ e $\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\mathrm{e}^n} \to 0$.

---

6. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \frac{\log(y-1-\mathrm{e}^x)}{\sqrt{4-x^2-(y-1)^2}} \, ,$$

determinare il suo insieme di definizione D .

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 5 febbraio 2010	**TEMA C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I <u>NON</u> devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5\sqrt{n}+2}{4n+3} \sin\left(\log(1+3/\sqrt{n})\right) .$$

---

2. Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{1}{3}\big(1+y(x)\big)^4 x\mathrm{e}^x , \\ y(0) = \lambda - 1 . \end{cases}$$

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\left(\sin x\sqrt{x}\right)^{2\alpha}}{\left[\sqrt[5]{x} - \log(1+\sqrt[5]{x})\right]^{2+4\alpha}}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $(0,1]$.

---

4. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x \cos x - x - 1 .$$

1) Determinarne i punti di massimo e minimo relativo di f in $[-2\pi, 0]$.
2) Utilizzare i risultati del punto precedente per determinare quante soluzioni possiede l'equazione

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - x - 1 = 0$$

nell'intervallo $[-2\pi, 0]$.

5.
1) Determinare due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n, b_n \to +\infty$ e $\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\mathrm{e}^n} \to 0$.
2) Determinare due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n, b_n \to +\infty$, $a_n \sim b_n$ e $\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\mathrm{e}^n} \to 0$.

---

6. Data la funzione $f: D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \frac{\log(y-1-\mathrm{e}^x)}{\sqrt{4-x^2-(y-1)^2}} ,$$

determinare il suo insieme di definizione D .

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 5 febbraio 2010	**TEMA D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n}+5}{3n+4} \log\left(1+\sin(5/n)\right) .$$

---

2. Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{1}{3} y^4(x)\, x \log x^2 \,, \\ y(1) = \lambda \,. \end{cases}$$

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\left[\exp\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right) - 1\right]^{1-\alpha}}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \sin\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{\alpha}}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $[1, +\infty)$.

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin x \cos x + x - 1 - \sin^2 x \,.$$

1) Determinarne i punti di massimo e minimo relativo di f in $[0, 2\pi]$.
2) Utilizzare i risultati del punto precedente per determinare quante soluzioni possiede l'equazione

$$\sin x \cos x + x - 1 - \sin^2 x = 0$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

5.
1) Determinare due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n, b_n \to +\infty$ e $\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\log n} \to +\infty$.
2) Determinare due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n, b_n \to +\infty$, $a_n \sim b_n$ e $\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\log n} \to +\infty$.

---

6. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \frac{\log(y - 1 - \mathrm{e}^x)}{\sqrt{4 - x^2 - (y-1)^2}} \,,$$

determinare il suo insieme di definizione D .