SOLUZIONI COMPITO dello 05/02/2010
ANALISI 1 - ELETTRICA 5 CFU

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 3/n$, si ottiene

$$a_n := \frac{\sqrt{n^3+3}}{2\sqrt{n}+5} \log(1+3/n) \sim \frac{n^{3/2}}{2\sqrt{n}} \frac{3}{n} = \frac{3}{2} \,.$$

Esercizio 2

L'equazione proposta è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili che ha come unica soluzione singolare la funzione costante $y(x) \equiv 0$. Essa però non è soluzione del problema di Cauchy, in quanto non soddisfa la condizione iniziale. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata fra le soluzioni ottenute con il metodo della separazione delle variabili. Dividiamo, quindi, ambo i membri dell'equazione per y^2 ed integriamo:

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{1}{y^2}\, dy = 4 \int x \log x \, dx = 2x^2 \log x - 2 \int x^2 \frac{1}{x}\, dx = 2x^2 \log x - x^2 + C \,.$$

Da ciò si ricava $y(x) = (x^2 - 2x^2 \log x - C)^{-1}$. Imponendo la condizione iniziale, otteniamo

$$1 = y(1) = \frac{1}{1-C} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 - C = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad C = 0 \,,$$

e quindi

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 2x^2 \log x} \,.$$

Esercizio 3

Effettuando il cambiamento di variabile $t = \mathrm{e}^{3x}$, da cui $3\mathrm{e}^{3x}\, dx = dt$, ovvero $dx = \frac{1}{3t}\, dt$, $t(0) = 1$ e $t\left(\frac{\log 4}{3}\right) = 4$, e decomponendo la razionale fratta propria così ottenuta, si ricava

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\log 4}{3}} \frac{1+\mathrm{e}^{3x}}{2+\mathrm{e}^{3x}}\, dx &= \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1+t}{(2+t)t}\, dt = \frac{1}{6}\left[\int_1^4 \frac{1}{t}\, dt + \int_1^4 \frac{1}{2+t}\, dt\right] \\ &= \frac{1}{6}\left[\log t + \log(2+t)\right]\Big|_1^4 = \frac{1}{6}\left[\log 4 + \log 6 - \log 3\right] = \frac{1}{6}\log 8 \,.\end{aligned}$$

Esercizio 4

Studiamo la monotonia della funzione nell'intervallo $[0, \pi/2]$, determinando il segno della sua derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} - \cos^2 x + \sin^2 x = -\frac{1}{2} - 1 + \sin^2 x + \sin^2 x \\ &= -\frac{3}{2} + 2\sin^2 x \begin{cases} > 0 & \text{se } \sin^2 x > \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \pi/3 < x < \pi/2; \\ = 0 & \text{se } \sin^2 x = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \pi/3; \\ < 0 & \text{se } \sin^2 x < \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < \pi/3. \end{cases}\end{aligned}$$

Pertanto, i punti $x = 0$, $\pi/2$ sono punti di massimo relativo, mentre il punto $x = \pi/3$ è punto di minimo relativo e assoluto. Infine, confrontando i valori di f nei due punti di massimo relativo, si ricava subito che $x = 0$ è anche punto di massimo assoluto.