CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 5 giugno 2009	**TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Stabilire se il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\sin^3 \sqrt{x}}{e^x(1-\cos x)}\, dx$$

esiste finito.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) = e^{-x} .$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} .$$

---

3. Stabilire, al variare del parametro $\alpha \geq 0$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left[\log^2\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\right] .$$

---

4. Data $f(x) = \log(e^{2x} - e^x + 2) - \log 2$, determinare i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per f nell'intervallo $[-\log 4, 0]$.

---

5. Sia $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^0([1,+\infty))$, strettamente decrescente e infinitesima per $x \to +\infty$, tale che $f(1) = 1$.
a) Dimostrare che f è invertibile e che la funzione inversa $g := f^{-1}$ è definita in $(0,1]$.
b) Assumendo che $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty))$, con $f'(x) \neq 0$, stabilire delle condizioni sufficienti su f , affinché si abbia

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 g(y)\, dy ,$$

dove $\alpha \in (0,+\infty)$ è una costante assegnata.

---

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 e^{\cos y}$, calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (1, \pi/2)$.

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 5 giugno 2009	**TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I <u>NON</u> devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Stabilire se il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} \log^3(1+\sqrt{x})}{(e^x-1)^3}\, dx$$

esiste finito.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y'(x) - 5y(x) = e^x \, .$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} \, .$$

---

3. Stabilire, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left[\sin^2\left(\frac{\alpha^2}{n}\right) - \frac{2}{n^2} \right] \, .$$

---

4. Data $f(x) = \log 4 - \log(3e^{2x} - 2e^x + 3)$, determinare i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per f nell'intervallo $[-\log 5, 0]$.

---

5. Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^0((0,1])$, strettamente decrescente e illimitata per $x \to 0^+$, tale che $f(1) = 1$.
a) Dimostrare che f è invertibile e che la funzione inversa $g := f^{-1}$ è definita in $[1,+\infty)$.
b) Assumendo che $g \in \mathcal{C}^1([1,+\infty))$, con $g'(x) \neq 0$, stabilire delle condizioni sufficienti su g , affinché si abbia

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \alpha \int_1^{+\infty} g(y)\, dy \, ,$$

dove $\alpha \in (0,+\infty)$ è una costante assegnata.

---

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = y^2 \cos(e^x)$, calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (\log(\pi/4), 1)$.

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 5 giugno 2009	**TEMA C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Stabilire se il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}\log^2(1+x)}{(e^{\sqrt{x}}-1)^7}\,dx$$

esiste finito.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x)+4y'(x)-5y(x)=e^{-5x}\,.$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}\,.$$

---

3. Stabilire, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left[\sin^2\left(\frac{2\alpha}{n}\right)-\frac{4}{n^2}\right].$$

---

4. Data $f(x)=\log 6-\log(3e^{2x}-2e^{x}+5)$, determinare i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per f nell'intervallo $[-\log 6,0]$.

---

5. Sia $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^0((0,1])$, strettamente decrescente e illimitata per $x\to 0^+$, tale che $f(1)=1$.
a) Dimostrare che f è invertibile e che la funzione inversa $g:=f^{-1}$ è definita in $[1,+\infty)$.
b) Assumendo che $g\in\mathcal{C}^1([1,+\infty))$, con $g'(x)\neq 0$, stabilire delle condizioni sufficienti su g, affinché si abbia

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\alpha\int_1^{+\infty} g(y)\,dy\,,$$

dove $\alpha\in(0,+\infty)$ è una costante assegnata.

---

6. Data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=y^2\cos(e^x)$, calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0=(\log(\pi/4),1)$.

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 5 giugno 2009	**TEMA D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Stabilire se il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{e^x(1-\cos\sqrt[4]{x})^5}\,dx$$

esiste finito.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) = e^{5x}\,.$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x}\,.$$

---

3. Stabilire, al variare del parametro $\alpha \geq 0$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left[\log^2\left(1+\frac{2\alpha}{n}\right) - \frac{3}{n^2}\right]\,.$$

---

4. Data $f(x) = \log(e^{2x} - e^x + 5) - \log 5$, determinare i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per f nell'intervallo $[-\log 3, 0]$.

---

5. Sia $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^0([1,+\infty))$, strettamente decrescente e infinitesima per $x \to +\infty$, tale che $f(1) = 1$.
a) Dimostrare che f è invertibile e che la funzione inversa $g := f^{-1}$ è definita in $(0,1]$.
b) Assumendo che $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty))$, con $f'(x) \neq 0$, stabilire delle condizioni sufficienti su f , affinché si abbia

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 g(y)\,dy\,,$$

dove $\alpha \in (0,+\infty)$ è una costante assegnata.

---

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 e^{\cos y}$, calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (1, \pi/2)$.