SOLUZIONI COMPITO del 5/06/2009
ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Poiché la funzione $f(x) = \frac{\sin^3 \sqrt{x}}{e^x(1-\cos x)}$ è continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale proposto converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno destro dell'origine. Per $x \to 0^+$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \sqrt{x}$, e quello al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \cos x$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{(\sqrt{x})^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{x^{1/2}} .$$

Poiché $1/2 < 1$, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto esiste finito.

Esercizio 2

a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1, 5$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} .$$

Dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Axe^{-x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + 4Axe^{-x} - 4Ae^{-x} - 5Axe^{-x} = e^{-x}$, cioè $A = -1/6$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} - \frac{1}{6} x e^{-x} ,$$

b) Calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}}{x} - \frac{1}{6} e^{-x} \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{C_2 e^{5x}}{x} ,$$

e quest'ultimo limite è finito se e solo se $C_2 = 0$. Quindi le soluzioni cercate saranno della forma $y(x) = C_1 e^{-x} - \frac{1}{6} x e^{-x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Chiaramente per $\alpha = 0$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum \left(-\frac{1}{n}\right)$ che, essendo proprio la serie armonica, a meno del segno, diverge. Pertanto, studiamo in dettaglio il caso $\alpha > 0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \alpha/n$, si ottiene

$$\log^2\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) = \left[\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 - \frac{\alpha^3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) .$$

Quindi possiamo riscrivere

$$a_n := n\left[\log^2\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\right] \sim n\left[\frac{\alpha^2}{n^2} - \frac{\alpha^3}{n^3} - \frac{1}{n^2}\right] = n\left[\frac{(\alpha^2-1)}{n^2} - \frac{\alpha^3}{n^3}\right] = \frac{(\alpha^2-1)}{n} - \frac{\alpha^3}{n^2} .$$

In definitiva, se $\alpha \neq 1$, si ottiene $a_n \sim \frac{(\alpha^2-1)}{n}$ e, quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie diverge, mentre se $\alpha = 1$, si ottiene $a_n \sim -\frac{1}{n^2}$ e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, la serie converge.

Esercizio 4

Innanzitutto osserviamo che $e^{2x} - e^x + 2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione proposta è ben definita su tutto l'asse reale; inoltre essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-\log 4, 0]$, quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Iniziamo studiando gli estremanti locali di f, calcolandone la derivata e studiandone il segno in $[-\log 4, 0]$. Tenendo conto di quanto appena osservato, si ottiene

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 2} = \frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 2}(2e^x - 1) \begin{cases} > 0 & \text{per } -\log 2 < x < 0, \\ = 0 & \text{per } x = \log(1/2) = -\log 2, \\ < 0 & \text{per } -\log 4 < x < -\log 2. \end{cases}$$

Quindi, dal criterio di monotonia, si ricava che $x = -\log 4$ e $x = 0$ sono punti di massimo locale per f, mentre $x = -\log 2$ è punto di minimo locale per f. Essendoci un unico punto di minimo locale, esso è necessariamente anche il punto di minimo assoluto; per determinare invece il punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di massimo locale. In questo modo si ottiene

$$f(-\log 4) = \log\left(\frac{29}{16}\right) - \log 2 = \log\left(\frac{29}{32}\right) < 0\,, \qquad f(0) = \log 2 - \log 2 = 0\,;$$

quindi $x = -\log 4$ risulta essere punto di massimo locale, mentre $x = 0$ risulta essere punto di massimo assoluto.

Esercizio 5

a) Poiché f è continua e strettamente monotona, essa è ovviamente invertibile. Inoltre, poiché $f(1) = 1$ ed f è continua, strettamente decrescente e infinitesima per $x \to +\infty$, si ha che f è positiva e $Im(f) = (0, 1]$, ovvero, detta $g = f^{-1}$, si avrà necessariamente che $dom(g) = (0, 1]$, $g(1) = 1$ e g strettamente decrescente e positiva.

b) Poiché $f(x) \to 0^+$ se e solo se $x \to +\infty$, ponendo $x = f^{-1}(y) = g(y)$, si ottiene che $f^{-1}(y) = g(y) \to +\infty$ se e solo se $y \to 0^+$. Effettuando il cambiamento di variabile $y = f(x)$ nel secondo integrale, da cui $f^{-1}(1) = g(1) = 1$ e $dy = f'(x)\, dx$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(y)\, dy &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 g(y)\, dy = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{f^{-1}(\epsilon)}^1 x f'(x)\, dx \\ &= -\lim_{M \to +\infty} \int_1^M x f'(x)\, dx = -\int_1^{+\infty} x f'(x)\, dx\,. \end{aligned}$$

Pertanto l'uguaglianza proposta sarà sicuramente verificata se imponiamo l'uguaglianza fra i due integrandi, cioè

$$f(x) = -\frac{1}{\alpha} x f'(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\alpha}{x}\,. \qquad (*)$$

La $(*)$ è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che in $[1, +\infty)$ ha come integrale generale le funzioni della forma $f(x) = C/x^\alpha$. Tenendo conto del fatto che $f(1) = 1$ si ottiene necessariamente $C = 1$, quindi una condizione che garantisce la validità dell'uguaglianza proposta è che, per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$, la funzione f sia della forma $f(x) = 1/x^\alpha$.

Esercizio 6

Osserviamo che $f(P_0) = 1$ e che

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^{\cos y} \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 (\sin y) e^{\cos y} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla f(x, y) = \left(2x e^{\cos y}, -x^2 (\sin y) e^{\cos y}\right)\,.$$

Quindi $\nabla f(P_0) = (2, -1)$ e l'equazione del piano tangente sarà $z = 1 + 2(x - 1) - (y - \pi/2)$.

TEMA B

Esercizio 1

Poiché la funzione $f(x) = \frac{e^{2x}\log^3(1+\sqrt{x})}{(e^x-1)^3}$ è continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale proposto converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno destro dell'origine. Per $x \to 0^+$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \sqrt{x}$, e per la funzione $x \mapsto e^x$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{(\sqrt{x})^3}{x^3} = \frac{1}{x^{3/2}}\,.$$

Poiché $3/2 > 1$, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto non esiste finito.

Esercizio 2

a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2+4\lambda-5=0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1, -5$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Axe^x$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $Axe^x+2Ae^x+4Axe^x+4Ae^x-5Axe^x = e^x$, cioè $A = 1/6$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{6}xe^x\,,$$

b) Calcolando

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{C_1e^x + C_2e^{-5x}}{x} + \frac{1}{6}e^x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{C_2e^{-5x}}{x}\,,$$

e quest'ultimo limite è finito se e solo se $C_2 = 0$. Quindi le soluzioni cercate saranno della forma $y(x) = C_1e^x + \frac{1}{6}xe^x$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Chiaramente per $\alpha = 0$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum\left(-\frac{2}{n}\right)$ che, essendo proprio la serie armonica, a meno del segno, diverge. Pertanto, studiamo in dettaglio il caso $\alpha \neq 0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \alpha^2/n$, si ottiene

$$\sin^2\left(\frac{\alpha^2}{n}\right) = \left[\frac{\alpha^2}{n} - \frac{\alpha^6}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^2 = \left(\frac{\alpha^2}{n}\right)^2 - \frac{\alpha^8}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\,.$$

Quindi possiamo riscrivere

$$a_n := n\left[\sin^2\left(\frac{\alpha^2}{n}\right) - \frac{2}{n^2}\right] \sim n\left[\frac{\alpha^4}{n^2} - \frac{\alpha^8}{3n^4} - \frac{2}{n^2}\right] = n\left[\frac{(\alpha^4-2)}{n^2} - \frac{\alpha^8}{3n^4}\right] = \frac{(\alpha^4-2)}{n} - \frac{\alpha^8}{3n^3}\,.$$

In definitiva, se $\alpha \neq \pm\sqrt[4]{2}$, si ottiene $a_n \sim \frac{(\alpha^4-2)}{n}$ e, quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie diverge, mentre se $\alpha = \pm\sqrt[4]{2}$, si ottiene $a_n \sim -\frac{4}{3n^3}$ e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, la serie converge.

Esercizio 4

Innanzitutto osserviamo che $3e^{2x} - 2e^x + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione proposta è ben definita su tutto l'asse reale; inoltre essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-\log 5, 0]$, quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Iniziamo studiando gli estremanti locali di f, calcolandone la derivata e studiandone il segno in $[-\log 5, 0]$. Tenendo conto di quanto appena osservato, si ottiene

$$f'(x) = -\frac{6e^{2x} - 2e^x}{3e^{2x} - 2e^x + 3} = \frac{2e^x}{3e^{2x} - 2e^x + 3}(1 - 3e^x) \begin{cases} > 0 & \text{per } -\log 5 < x < -\log 3, \\ = 0 & \text{per } x = \log(1/3) = -\log 3, \\ < 0 & \text{per } -\log 3 < x < 0. \end{cases}$$

Quindi, dal criterio di monotonia, si ricava che $x = -\log 5$ e $x = 0$ sono punti di minimo locale per f, mentre $x = -\log 3$ è punto di massimo locale per f. Essendoci un unico punto di massimo locale, esso è necessariamente anche il punto di massimo assoluto; per determinare invece il punto di minimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di minimo locale. In questo modo si ottiene

$$f(-\log 5) = \log 4 - \log\left(\frac{68}{25}\right) = \log\left(\frac{100}{68}\right) > 0\,, \qquad f(0) = \log 4 - \log 4 = 0\,;$$

quindi $x = -\log 5$ risulta essere punto di minimo locale, mentre $x = 0$ risulta essere punto di minimo assoluto.

Esercizio 5

a) Poiché f è continua e strettamente monotona, essa è ovviamente invertibile. Inoltre, poiché $f(1) = 1$ ed f è continua, strettamente decrescente ed illimitata, si ha che $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$, f è positiva e $Im(f) = [1, +\infty)$, ovvero, detta $g = f^{-1}$, si avrà necessariamente che $dom(g) = [1, +\infty)$, $g(1) = 1$ e g strettamente decrescente e positiva.

b) Dalla regolarità di f e dal fatto che $f' \neq 0$, si ottiene la regolarità di g. Poiché $f(x) \to +\infty$ se e solo se $x \to 0^+$, ricordando che $y = f(x) = g^{-1}(x)$, si ottiene che $g^{-1}(x) = f(x) \to +\infty$ se e solo se $x \to 0^+$. Effettuando il cambiamento di variabile $x = g(y)$ nel primo integrale, da cui $g^{-1}(1) = f(1) = 1$ e $dx = g'(y)\, dy$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\, dx &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{g^{-1}(\epsilon)}^1 y g'(y)\, dy \\ &= -\lim_{M \to +\infty} \int_1^M y g'(y)\, dy = -\int_1^{+\infty} y g'(y)\, dy\,. \end{aligned}$$

Pertanto l'uguaglianza proposta sarà sicuramente verificata se imponiamo l'uguaglianza fra i due integrandi, cioè

$$-y g'(y) = \alpha g(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{g'(y)}{g(y)} = -\frac{\alpha}{y}\,. \tag{$*$}$$

La $(*)$ è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che in $[1, +\infty)$ ha come integrale generale le funzioni della forma $g(y) = C/y^\alpha$. Tenendo conto del fatto che $g(1) = 1$ si ottiene necessariamente $C = 1$, quindi una condizione che garantisce la validità dell'uguaglianza proposta è che, per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$, la funzione g sia della forma $g(y) = 1/y^\alpha$.

Esercizio 6

Osserviamo che $f(P_0) = 1/\sqrt{2}$ e che

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -y^2 e^x \sin(e^x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\cos(e^x) \end{aligned}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla f(x,y) = \left(-y^2 e^x \sin(e^x), 2y\cos(e^x)\right)\,.$$

Quindi $\nabla f(P_0) = \left(-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ e l'equazione del piano tangente sarà $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(x - \log\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}(y-1)$.

TEMA C

Esercizio 1

Poiché la funzione $f(x) = \frac{e^{2x}\log^2(1+x)}{(e^{\sqrt{x}}-1)^7}$ è continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale proposto converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno destro dell'origine. Per $x \to 0^+$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$ e per la funzione $t \mapsto e^t$, con $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{x^2}{(\sqrt{x})^7} = \frac{1}{x^{3/2}} .$$

Poiché $3/2 > 1$, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto non esiste finito.

Esercizio 2

a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2+4\lambda-5=0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1, -5$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} .$$

Dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Axe^{-5x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $25Axe^{-5x} - 10Ae^{-5x} - 20Axe^{-5x} + 4Ae^{-5x} - 5Axe^{-5x} = e^{-5x}$, cioè $A = -1/6$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{6} x e^{-5x} ,$$

b) Calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{C_1 e^x + C_2 e^{-5x}}{x} - \frac{1}{6} e^{-5x} \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{C_1 e^x}{x} ,$$

e quest'ultimo limite è finito se e solo se $C_1 = 0$. Quindi le soluzioni cercate saranno della forma $y(x) = C_2 e^{-5x} - \frac{1}{6} x e^{-5x}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Chiaramente per $\alpha = 0$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum \left(-\frac{4}{n}\right)$ che, essendo proprio la serie armonica, a meno del segno, diverge. Pertanto, studiamo in dettaglio il caso $\alpha \neq 0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 2\alpha/n$, si ottiene

$$\sin^2\left(\frac{2\alpha}{n}\right) = \left[\frac{2\alpha}{n} - \frac{8\alpha^3}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^2 = \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^2 - \frac{16\alpha^4}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) .$$

Quindi possiamo riscrivere

$$a_n := n\left[\sin^2\left(\frac{2\alpha}{n}\right) - \frac{4}{n^2}\right] \sim n\left[\frac{4\alpha^2}{n^2} - \frac{16\alpha^4}{3n^4} - \frac{4}{n^2}\right] = n\left[\frac{(4\alpha^2-4)}{n^2} - \frac{16\alpha^4}{3n^4}\right] = \frac{(4\alpha^4-4)}{n} - \frac{16\alpha^4}{3n^3} .$$

In definitiva, se $\alpha \neq \pm 1$, si ottiene $a_n \sim \frac{(4\alpha^4-4)}{n}$ e, quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie diverge, mentre se $\alpha = \pm 1$, si ottiene $a_n \sim -\frac{16}{3n^3}$ e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, la serie converge.

Esercizio 4

Innanzitutto osserviamo che $3e^{2x} - 2e^x + 5 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione proposta è ben definita su tutto l'asse reale; inoltre essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-\log 6, 0]$, quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Iniziamo studiando gli estremanti locali di f, calcolandone la derivata e studiandone il segno in $[-\log 6, 0]$. Tenendo conto di quanto appena osservato, si ottiene

$$f'(x) = -\frac{6e^{2x} - 2e^x}{3e^{2x} - 2e^x + 5} = \frac{2e^x}{3e^{2x} - 2e^x + 5}(1 - 3e^x) \begin{cases} > 0 & \text{per } -\log 6 < x < -\log 3, \\ = 0 & \text{per } x = \log(1/3) = -\log 3, \\ < 0 & \text{per } -\log 3 < x < 0. \end{cases}$$

Quindi, dal criterio di monotonia, si ricava che $x = -\log 6$ e $x = 0$ sono punti di minimo locale per f, mentre $x = -\log 3$ è punto di massimo locale per f. Essendoci un unico punto di massimo locale, esso è necessariamente anche il punto di massimo assoluto; per determinare invece il punto di minimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di minimo locale. In questo modo si ottiene

$$f(-\log 6) = \log 6 - \log\left(\frac{57}{12}\right) = \log\left(\frac{72}{57}\right) > 0\,, \qquad f(0) = \log 6 - \log 6 = 0\,;$$

quindi $x = -\log 6$ risulta essere punto di minimo locale, mentre $x = 0$ risulta essere punto di minimo assoluto.

Esercizio 5

a) Poiché f è continua e strettamente monotona, essa è ovviamente invertibile. Inoltre, poiché $f(1) = 1$ ed f è continua, strettamente decrescente ed illimitata, si ha che $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$, f è positiva e $Im(f) = [1, +\infty)$, ovvero, detta $g = f^{-1}$, si avrà necessariamente che $dom(g) = [1, +\infty)$, $g(1) = 1$ e g strettamente decrescente e positiva.

b) Dalla regolarità di f e dal fatto che $f' \neq 0$, si ottiene la regolarità di g. Poiché $f(x) \to +\infty$ se e solo se $x \to 0^+$, ricordando che $y = f(x) = g^{-1}(x)$, si ottiene che $g^{-1}(x) = f(x) \to +\infty$ se e solo se $x \to 0^+$. Effettuando il cambiamento di variabile $x = g(y)$ nel primo integrale, da cui $g^{-1}(1) = f(1) = 1$ e $dx = g'(y)\ dy$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\ dx &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)\ dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{g^{-1}(\epsilon)}^1 y g'(y)\ dy \\ &= -\lim_{M \to +\infty} \int_1^M y g'(y)\ dy = -\int_1^{+\infty} y g'(y)\ dy\,. \end{aligned}$$

Pertanto l'uguaglianza proposta sarà sicuramente verificata se imponiamo l'uguaglianza fra i due integrandi, cioè

$$-y g'(y) = \alpha g(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{g'(y)}{g(y)} = -\frac{\alpha}{y}\,. \tag{$*$}$$

La $(*)$ è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che in $[1, +\infty)$ ha come integrale generale le funzioni della forma $g(y) = C/y^\alpha$. Tenendo conto del fatto che $g(1) = 1$ si ottiene necessariamente $C = 1$, quindi una condizione che garantisce la validità dell'uguaglianza proposta è che, per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$, la funzione g sia della forma $g(y) = 1/y^\alpha$.

Esercizio 6

Osserviamo che $f(P_0) = 1/\sqrt{2}$ e che

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -y^2 e^x \sin(e^x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \cos(e^x) \end{aligned}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla f(x, y) = \left(-y^2 e^x \sin(e^x), 2y\cos(e^x)\right)\,.$$

Quindi $\nabla f(P_0) = \left(-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ e l'equazione del piano tangente sarà $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(x - \log\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}(y - 1)$.

TEMA D

Esercizio 1

Poiché la funzione $f(x) = \frac{\sin^2 x}{e^x(1-\cos\sqrt[4]{x})^5}$ è continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale proposto converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno destro dell'origine. Per $x \to 0^+$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$ e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = \sqrt[4]{x}$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{x^2}{(\frac{1}{2}\sqrt{x})^5} = \frac{32}{x^{1/2}}\,.$$

Poiché $1/2 < 1$, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto esiste finito.

Esercizio 2

a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1, 5$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Axe^{5x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $25Axe^{5x} + 10Ae^{5x} - 20Axe^{5x} - 4Ae^{5x} - 5Axe^{5x} = e^{5x}$, cioè $A = 1/6$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} + \frac{1}{6} x e^{5x}\,,$$

b) Calcolando

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}}{x} + \frac{1}{6} e^{5x}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{C_1 e^{-x}}{x}\,,$$

e quest'ultimo limite è finito se e solo se $C_1 = 0$. Quindi le soluzioni cercate saranno della forma $y(x) = C_2 e^{5x} + \frac{1}{6} x e^{5x}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Chiaramente per $\alpha = 0$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum \left(-\frac{3}{n}\right)$ che, essendo proprio la serie armonica, a meno del segno, diverge. Pertanto, studiamo in dettaglio il caso $\alpha > 0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 2\alpha/n$, si ottiene

$$\log^2\left(1 + \frac{2\alpha}{n}\right) = \left[\frac{2\alpha}{n} - \frac{4\alpha^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 = \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^2 - \frac{8\alpha^3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\,.$$

Quindi possiamo riscrivere

$$a_n := n\left[\log^2\left(1 + \frac{2\alpha}{n}\right) - \frac{3}{n^2}\right] \sim n\left[\frac{4\alpha^2}{n^2} - \frac{8\alpha^3}{n^3} - \frac{3}{n^2}\right] = n\left[\frac{(4\alpha^2-3)}{n^2} - \frac{8\alpha^3}{n^3}\right] = \frac{(4\alpha^2-3)}{n} - \frac{8\alpha^3}{n^2}\,.$$

In definitiva, se $\alpha \neq \sqrt{3}/2$, si ottiene $a_n \sim \frac{(4\alpha^2-3)}{n}$ e, quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie diverge, mentre se $\alpha = \sqrt{3}/2$, si ottiene $a_n \sim -\frac{3\sqrt{3}}{n^2}$ e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, la serie converge.

Esercizio 4

Innanzitutto osserviamo che $e^{2x} - e^x + 5 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione proposta è ben definita su tutto l'asse reale; inoltre essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-\log 3, 0]$, quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Iniziamo studiando gli estremanti locali di f, calcolandone la derivata e studiandone il segno in $[-\log 3, 0]$. Tenendo conto di quanto appena osservato, si ottiene

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 5} = \frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 5}(2e^x - 1) \begin{cases} > 0 & \text{per } -\log 2 < x < 0, \\ = 0 & \text{per } x = \log(1/2) = -\log 2, \\ < 0 & \text{per } -\log 3 < x < -\log 2. \end{cases}$$

Quindi, dal criterio di monotonia, si ricava che $x = -\log 3$ e $x = 0$ sono punti di massimo locale per f, mentre $x = -\log 2$ è punto di minimo locale per f. Essendoci un unico punto di minimo locale, esso è necessariamente anche il punto di minimo assoluto; per determinare invece il punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di massimo locale. In questo modo si ottiene

$$f(-\log 3) = \log\left(\frac{43}{9}\right) - \log 5 = \log\left(\frac{43}{45}\right) < 0\,, \qquad f(0) = \log 5 - \log 5 = 0\,;$$

quindi $x = -\log 3$ risulta essere punto di massimo locale, mentre $x = 0$ risulta essere punto di massimo assoluto.

Esercizio 5

a) Poiché $f(1) = 1$ ed f è positiva e infinitesima per $x \to +\infty$, si ha che $Im(f) = (0, 1]$, ovvero, detta $g = f^{-1}$, si avrà necessariamente che $dom(g) = (0, 1]$, $g(1) = 1$ e g strettamente decrescente.

b) Dalla regolarità di f e dal fatto che $f' \neq 0$ si ottiene la regolarità di g. Inoltre, poiché $f(x) \to 0^+$ se e solo se $x \to +\infty$, ponendo $x = f^{-1}(y) = g(y)$, si ottiene che $f^{-1}(y) = g(y) \to +\infty$ se e solo se $y \to 0^+$. Effettuando il cambiamento di variabile $y = f(x)$ nel secondo integrale, da cui $f^{-1}(1) = g(1) = 1$ e $dy = f'(x)\, dx$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(y)\, dy &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 g(y)\, dy = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{f^{-1}(\epsilon)}^1 x f'(x)\, dx \\ &= -\lim_{M \to +\infty} \int_1^M x f'(x)\, dx = -\int_1^{+\infty} x f'(x)\, dx\,. \end{aligned}$$

Pertanto l'uguaglianza proposta sarà sicuramente verificata se imponiamo l'uguaglianza fra i due integrandi, cioè

$$f(x) = -\frac{1}{\alpha} x f'(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\alpha}{x}\,. \tag{$*$}$$

La $(*)$ è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che ha come integrale generale le funzioni della forma $f(x) = C/x^\alpha$. Tenendo conto del segno di f e del fatto che $f(1) = 1$ si ottiene necessariamente $C = 1$, quindi una condizione che garantisce la validità dell'uguaglianza proposta è che, per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$, la funzione f sia della forma $f(x) = 1/x^\alpha$.

Esercizio 6

Osserviamo che $f(P_0) = 1$ e che

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^{\cos y} \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 (\sin y) e^{\cos y} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla f(x, y) = \left(2x e^{\cos y}, -x^2 (\sin y) e^{\cos y}\right)\,.$$

Quindi $\nabla f(P_0) = (2, -1)$ e l'equazione del piano tangente sarà $z = 1 + 2(x - 1) - (y - \pi/2)$.