SOLUZIONI COMPITO del 5/06/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno arbitrario (in funzione del parametro reale x), pertanto cominciamo a considerarne il modulo. Ricordiamo anche che

$$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|^n \to \begin{cases} 0 & \text{se } \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| < 1, \text{ ovvero se } x \neq \pm 1; \\ 1 & \text{se } \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| = 1, \text{ ovvero se } x = \pm 1; \\ +\infty & \text{se } \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| > 1, \text{ ovvero per nessun } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pertanto, per $x = \pm 1$, si ricava che il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge né asolutamente né semplicemente. Invece, per $x \neq \pm 1$, applicando il criterio della radice, otteniamo

$$\sqrt[n]{\left|\sin\left[\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n\right]\right|} \sim \sqrt[n]{\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|^n} = \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| < 1\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sin y \sim y$, per $y \to 0$, con $y = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n$. Quindi, la serie converge assolutamente e semplicemente se e solo se $x \neq \pm 1$.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere in vari modi. Noi procederemo effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x+5}$, da cui $x = t^2 - 5$, ovvero $dx = 2t\,dt$, $t(-5) = 0$, $t(20) = 5$. Quindi ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{20} \sqrt{x+5}\; e^{\sqrt{x+5}}\, dx &= 2\int_0^5 t^2\, e^t\; dt = 2t^2\, e^t\Big|_0^5 - 4\int_0^5 t\; e^t\; dt = 50e^5 - 4t\, e^t\Big|_0^5 + 4\int_0^5 e^t\; dt \\ &= 50e^5 - 20e^5 + 4e^t\Big|_0^5 = 30e^5 + 4e^5 - 4 = 34e^5 - 4\,, \end{aligned}$$

dove, nella seconda e nella terza uguaglianza abbiamo utilizzato un'integrazione per parti.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y_n'(x) = \frac{y_n^2(x)+1}{y_n(x)}\,\frac{1}{x^2+n}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{2}\log(y^2+1) = \int \frac{y}{y^2+1}\, dy = \int \frac{1}{x^2+n}\, dx = \frac{1}{n}\int \frac{1}{(x/\sqrt{n})^2+1}\, dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n}} + C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $C = \frac{1}{2}\log 3$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y_n(x) = \sqrt{3\exp\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - 1}\,.$$

Inserendo nel limite proposto l'espressione trovata, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n^2(x) - 2}{\log\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\exp\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - 1 - 2}{\log\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} 3\,\frac{\exp\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - 1}{\frac{x}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} 3\,\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}\,\frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{n}} = 6\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che, per $y \to 0$, $e^y - 1 \sim y$, con $y = \frac{2}{\sqrt{n}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n}}$, $\arctan y \sim y$, con $y = \frac{x}{\sqrt{n}}$ e $\log(1+y) \sim y$, con $y = \frac{x}{n+1}$.

Esercizio 4

Osserviamo innanzitutto che possiamo riscrivere la funzione nella forma $f(x) = \log\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)\sin^2(x-2)$, da cui, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $y \mapsto \log(1+y)$, con $y = (x-2)/2$, e per la funzione $y \mapsto \sin y$, con $y = x-2$, otteniamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left[\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3 + o\big((x-2)^3\big)\right]\left[(x-2) - \frac{1}{3!}(x-2)^3 + o\big((x-2)^3\big)\right]^2 \\
&= \left[\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3 + o\big((x-2)^3\big)\right]\left[(x-2)^2 - \frac{1}{3}(x-2)^4 + o\big((x-2)^4\big)\right] \\
&= \frac{(x-2)^3}{2} - \frac{(x-2)^4}{8} + \frac{(x-2)^5}{24} - \frac{(x-2)^5}{6} + o\big((x-2)^5\big) \\
&= \frac{(x-2)^3}{2} - \frac{(x-2)^4}{8} - \frac{(x-2)^5}{8} + o\big((x-2)^5\big)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Poiché per ipotesi $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto \sqrt{x}$ è di classe $\mathcal{C}^0\big([0,+\infty)\big)$, per il teorema sulla derivazione delle funzioni composte, la funzione $x \mapsto f(\sqrt{x})$ è anch'essa continua in $[0,+\infty)$; pertanto, la funzione integrale $x \mapsto \int_0^x \big[f(\sqrt{t}) - 1\big]\,dt$ è di classe $\mathcal{C}^1\big([0,+\infty)\big)$ e si annulla nell'origine. Dal Teorema di Torricelli e dal Teorema di de L'Hospital, si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x \Big[f(\sqrt{t}) - 1\Big]\,dt \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(\sqrt{x}) - 1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + 6x + o(x) - 1}{2x} = 3 = F(0)\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo di f. Pertanto, F risulta continua nell'origine.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi (indipendentemente dal parametro reale x). Ricordiamo anche che

$$\left(\frac{4x^2}{x^4+4}\right)^n \to \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{4x^2}{x^4+4} < 1, \text{ ovvero se } x \neq \pm\sqrt{2}; \\ 1 & \text{se } \frac{4x^2}{x^4+4} = 1, \text{ ovvero se } x = \pm\sqrt{2}; \\ +\infty & \text{se } \frac{4x^2}{x^4+4} > 1, \text{ ovvero per nessun } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pertanto, per $x = \pm\sqrt{2}$, si ricava che il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge (ovvero, in questo caseo, diverge). Invece, per $x \neq \pm\sqrt{2}$, applicando il criterio della radice, otteniamo

$$\sqrt[n]{\log\left[1+\left(\frac{4x^2}{x^4+4}\right)^n\right]} \sim \sqrt[n]{\left(\frac{4x^2}{x^4+4}\right)^n} = \frac{4x^2}{x^4+4} < 1\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\log(1+y) \sim y$, per $y \to 0$, con $y = \left(\frac{4x^2}{x^4+4}\right)^n$. Quindi, la serie converge se e solo se $x \neq \pm\sqrt{2}$.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere in vari modi. Noi procederemo effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x+1}$, da cui $x = t^2 - 1$, ovvero $dx = 2t\,dt$, $t(-1) = 0$, $t(3) = 2$. Quindi ricaviamo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\ \sin(\sqrt{x+1})\,dx &= 2\int_0^2 t^2 \sin t\ dt = -2t^2\ \cos t\Big|_0^2 + 4\int_0^2 t\ \cos t\ dt \\ &= -8\cos 2 + 4t\ \sin t\Big|_0^2 - 4\int_0^2 \sin t\ dt = -8\cos 2 + 8\sin 2 + 4\cos t\Big|_0^2 \\ &= -8\cos 2 + 8\sin 2 + 4\cos 2 - 4 = -4\cos 2 + 8\sin 2 - 4\,,\end{aligned}$$

dove, nella seconda e nella terza uguaglianza abbiamo utilizzato un'integrazione per parti.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y_n'(x) = \frac{1}{e^{y_n(x)+1}}\,\frac{1}{x^2+n}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$e^{y+1} = \int e^{y+1}\,dy = \int \frac{1}{x^2+n}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{1}{(x/\sqrt{n})^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\ \arctan\frac{x}{\sqrt{n}} + C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $C = 1$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y_n(x) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\ \arctan\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right) - 1\,.$$

Inserendo nel limite proposto l'espressione trovata, otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n(x)+1}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{x}{2n+1}}\right)} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\ \arctan\frac{x}{\sqrt{n}}+1\right)-1+1}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{x}{2n+1}}\right)} \\ = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\ \arctan\frac{x}{\sqrt{n}}+1\right)}{\frac{x}{2n+1}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{2n}} = 2\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che, per $y \to 0$, $\log(1+y) \sim y$, con $y = \frac{1}{\sqrt{n}}\ \arctan\frac{x}{\sqrt{n}}$, $\arctan y \sim y$, con $y = \frac{x}{\sqrt{n}}$ e $\sin y \sim y$, con $y = \sqrt{\frac{x}{2n+1}}$.

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{x-1} - 1\right)\{\cos[2(x-1)] - 1\}^2 \ ,$$

da cui, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $y \mapsto \mathrm{e}^y$, con $y = x-1$, e quello al quarto ordine per la funzione $y \mapsto \cos y$, con $y = 2(x-1)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}\left[(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + o\big((x-1)^3\big)\right]\left\{-\frac{[2(x-1)]^2}{2} + \frac{[2(x-1)]^4}{4!} + o\big((x-1)^4\big)\right\}^2 \\
&= \mathrm{e}\left[(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + o\big((x-1)^3\big)\right]\left[4(x-1)^4 - \frac{8}{3}(x-1)^6 + o\big((x-1)^6\big)\right] \\
&= 4\mathrm{e}(x-1)^5 + 2\mathrm{e}(x-1)^6 + \frac{2\mathrm{e}(x-1)^7}{3} - \frac{8\mathrm{e}(x-1)^7}{3} + o\big((x-1)^7\big) \\
&= 4\mathrm{e}(x-1)^5 + 2\mathrm{e}(x-1)^6 - 2\mathrm{e}(x-1)^7 + o\big((x-1)^7\big)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Poiché per ipotesi $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ così come la funzione $x \mapsto x^3$, per il teorema sulla derivazione delle funzioni composte, la funzione $x \mapsto f(x^3)$ è anch'essa continua su $\mathbb{R}$; pertanto, la funzione integrale $x \mapsto \int_0^x \left[2 + f(t^3)\right] dt$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e si annulla nell'origine. Dal Teorema di Torricelli e dal Teorema di de L'Hospital, si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}\int_0^x \left[2 + f(t^3)\right] dt \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{2 + f(x^3)}{3x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2 - 2 + x^2 + o(x^2)}{3x^2} = 1/3 = F(0)\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo di f. Pertanto, F risulta continua nell'origine.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi (indipendentemente dal parametro reale x). Ricordiamo anche che

$$\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)^n \to \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{2x^2}{x^4+1} < 1, \text{ ovvero se } x \neq \pm 1; \\ 1 & \text{se } \frac{2x^2}{x^4+1} = 1, \text{ ovvero se } x = \pm 1; \\ +\infty & \text{se } \frac{2x^2}{x^4+1} > 1, \text{ ovvero per nessun } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pertanto, per $x = \pm 1$, si ricava che il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge (ovvero, in questo caso, diverge). Invece, per $x \neq \pm 1$, applicando il criterio della radice, otteniamo

$$\sqrt[n]{\log\left[1 + \left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)^n\right]} \sim \sqrt[n]{\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)^n} = \frac{2x^2}{x^4+1} < 1\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\log(1+y) \sim y$, per $y \to 0$, con $y = \left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)^n$. Quindi, la serie converge se e solo se $x \neq \pm 1$.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere in vari modi. Noi procederemo effettuando la sostituzione $t = \sqrt{2x+1}$, da cui $x = (t^2-1)/2$, ovvero $dx = t\,dt$, $t(-1/2) = 0$, $t(4) = 3$. Quindi ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{4} \sqrt{2x+1}\ \sin(\sqrt{2x+1})\,dx &= \int_0^3 t^2 \ \sin t \ dt = -t^2 \ \cos t\Big|_0^3 + 2\int_0^3 t \ \cos t \ dt \\ &= -9\cos 3 + 2t \ \sin t\Big|_0^3 - 2\int_0^3 \sin t \ dt = -9\cos 3 + 6\sin 3 + 2\cos t\Big|_0^3 \\ &= -9\cos 3 + 6\sin 3 + 2\cos 3 - 2 = -7\cos 3 + 6\sin 3 - 2\,, \end{aligned}$$

dove, nella seconda e nella terza uguaglianza abbiamo utilizzato un'integrazione per parti.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y_n'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{y_n(x)-2}}\ \frac{1}{x^2+n^2}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\mathrm{e}^{y-2} = \int \mathrm{e}^{y-2}\,dy = \int \frac{1}{x^2+n^2}\,dx = \frac{1}{n^2}\int \frac{1}{(x/n)^2+1}\,dx = \frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n} + C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $C = 1$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y_n(x) = \log\left(\frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n} + 1\right) + 2\,.$$

Inserendo nel limite proposto l'espressione trovata, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n(x)-2}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{2x}{n^2+1}}\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n} + 1\right) + 2 - 2}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{2x}{n^2+1}}\right)} \\ = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n} + 1\right)}{\frac{2x}{n^2+1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}\,\frac{x}{n}}{\frac{2x}{n^2}} = \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che, per $y \to 0$, $\log(1+y) \sim y$, con $y = \frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n}$, $\arctan y \sim y$, con $y = \frac{x}{n}$ e $\sin y \sim y$, con $y = \sqrt{\frac{2x}{n^2+1}}$.

Esercizio 4
Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{x-4} - 1\right)\left[\cosh(x-4) - 1\right]^2 ,$$

da cui, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $y \mapsto \mathrm{e}^y$, con $y = x - 4$, e quello al quarto ordine per la funzione $y \mapsto \cos y$, con $y = x - 14$, otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}\left[(x-4) + \frac{(x-4)^2}{2} + \frac{(x-4)^3}{3!} + o\big((x-4)^3\big)\right]\left\{\frac{(x-4)^2}{2} + \frac{(x-4)^4}{4!} + o\big((x-4)^4\big)\right\}^2 \\ &= \mathrm{e}\left[(x-4) + \frac{(x-4)^2}{2} + \frac{(x-4)^3}{3!} + o\big((x-4)^3\big)\right]\left[\frac{1}{4}(x-4)^4 + \frac{1}{24}(x-4)^6 + o\big((x-4)^6\big)\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}(x-4)^5}{4} + \frac{\mathrm{e}(x-4)^6}{8} + \frac{\mathrm{e}(x-4)^7}{24} + \frac{\mathrm{e}(x-4)^7}{24} + o\big((x-4)^7\big) \\ &= \frac{\mathrm{e}(x-4)^5}{4} + \frac{\mathrm{e}(x-4)^6}{8} + \frac{\mathrm{e}(x-4)^7}{12} + o\big((x-4)^7\big) . \end{aligned}$$

Esercizio 5
Poiché per ipotesi $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ così come la funzione $x \mapsto x^3$, per il teorema sulla derivazione delle funzioni composte, la funzione $x \mapsto f(x^3)$ è anch'essa continua su $\mathbb{R}$; pertanto, la funzione integrale $x \mapsto \int_0^x \left[2 + f(t^3)\right] dt$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e si annulla nell'origine. Dal Teorema di Torricelli e dal Teorema di de L'Hospital, si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}\int_0^x \left[2 + f(t^3)\right] dt \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{2 + f(x^3)}{3x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2 - 2 + x^2 + o(x^2)}{3x^2} = 1/3 = F(0) ,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo di f. Pertanto, F risulta continua nell'origine.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno arbitrario (in funzione del parametro reale x), pertanto cominciamo a considerarne il modulo. Ricordiamo anche che

$$\left|\frac{4x}{x^2+4}\right|^n \to \begin{cases} 0 & \text{se } \left|\frac{4x}{x^2+4}\right| < 1, \text{ ovvero se } x \neq \pm 2; \\ 1 & \text{se } \left|\frac{4x}{x^2+4}\right| = 1, \text{ ovvero se } x = \pm 2; \\ +\infty & \text{se } \left|\frac{4x}{x^2+4}\right| > 1, \text{ ovvero per nessun } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pertanto, per $x = \pm 2$, si ricava che il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge né asolutamente né semplicemente. Invece, per $x \neq \pm 2$, applicando il criterio della radice, otteniamo

$$\sqrt[n]{\left|\sin\left[\left(\frac{4x}{x^2+4}\right)^n\right]\right|} \sim \sqrt[n]{\left|\frac{4x}{x^2+4}\right|^n} = \left|\frac{4x}{x^2+4}\right| < 1\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sin y \sim y$, per $y \to 0$, con $y = \left(\frac{4x}{x^2+4}\right)^n$. Quindi, la serie converge assolutamente e semplicemente se e solo se $x \neq \pm 2$.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere in vari modi. Noi procederemo effettuando la sostituzione $t = \sqrt{2x+6}$, da cui $x = (t^2-6)/2$, ovvero $dx = t\,dt$, $t(-3) = 0$, $t(5) = 4$. Quindi ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{5} \sqrt{2x+6}\ \mathrm{e}^{\sqrt{2x+6}}\,dx &= \int_0^4 t^2\,\mathrm{e}^t\ dt = t^2\,\mathrm{e}^t\Big|_0^4 - 2\int_0^4 t\ \mathrm{e}^t\ dt = 16\mathrm{e}^4 - 2t\ \mathrm{e}^t\Big|_0^4 + 2\int_0^4 \mathrm{e}^t\ dt \\ &= 16\mathrm{e}^4 - 8\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}^t\Big|_0^4 = 8\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}^4 - 2 = 10\mathrm{e}^4 - 2\,, \end{aligned}$$

dove, nella seconda e nella terza uguaglianza abbiamo utilizzato un'integrazione per parti.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y_n'(x) = \frac{y_n^2(x)+2}{2y_n(x)}\,\frac{1}{x^2+n^2}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\log(y^2+2) = \int \frac{2y}{y^2+2}\,dy = \int \frac{1}{x^2+n^2}\,dx = \frac{1}{n^2}\int \frac{1}{(x/n)^2+1}\,dx = \frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n} + C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $C = \log 6$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y_n(x) = \sqrt{6\exp\left(\frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n}\right) - 2}\,.$$

Inserendo nel limite proposto l'espressione trovata, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n^2(x) - 4}{\log\left(1 + \frac{x}{2n^2+1}\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{6\exp\left(\frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n}\right) - 2 - 4}{\log\left(1 + \frac{x}{2n^2+1}\right)} \\ = \lim_{n\to+\infty} 6\frac{\exp\left(\frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n}\right) - 1}{\frac{x}{2n^2+1}} &= \lim_{n\to+\infty} 6\frac{\frac{1}{n}\frac{x}{n}}{\frac{x}{2n^2}} = 12\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che, per $y \to 0$, $\mathrm{e}^y - 1 \sim y$, con $y = \frac{1}{n}\ \arctan\frac{x}{n}$, $\arctan y \sim y$, con $y = \frac{x}{n}$ e $\log(1+y) \sim y$, con $y = \frac{x}{2n^2+1}$.

Esercizio 4

Osserviamo innanzitutto che possiamo riscrivere la funzione nella forma $f(x) = \log\big(1+\frac{x-3}{3}\big)\sinh^2(x-3)$, da cui, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $y \mapsto \log(1+y)$, con $y = (x-3)/3$, e per la funzione $y \mapsto \sinh y$, con $y = x-3$, otteniamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left[\left(\frac{x-3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-3}{3}\right)^3 + o\big((x-3)^3\big)\right]\left[(x-3) + \frac{1}{3!}\,(x-3)^3 + o\big((x-3)^3\big)\right]^2 \\
&= \left[\left(\frac{x-3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-3}{3}\right)^3 + o\big((x-3)^3\big)\right]\left[(x-3)^2 + \frac{1}{3}\,(x-3)^4 + o\big((x-3)^4\big)\right] \\
&= \frac{(x-3)^3}{3} - \frac{(x-3)^4}{18} + \frac{(x-3)^5}{81} + \frac{(x-3)^5}{9} + o\big((x-3)^5\big) \\
&= \frac{(x-3)^3}{3} - \frac{(x-3)^4}{18} + \frac{10(x-3)^5}{81} + o\big((x-3)^5\big)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Poiché per ipotesi $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto \sqrt{x}$ è di classe $\mathcal{C}^0\big([0,+\infty)\big)$, per il teorema sulla derivazione delle funzioni composte, la funzione $x \mapsto f(\sqrt{x})$ è anch'essa continua in $[0,+\infty)$; pertanto, la funzione integrale $x \mapsto \int_0^x \big[f(\sqrt{t})-1\big]\,dt$ è di classe $\mathcal{C}^1\big([0,+\infty)\big)$ e si annulla nell'origine. Dal Teorema di Torricelli e dal Teorema di de L'Hospital, si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x \Big[f(\sqrt{t})-1\Big]\,dt \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(\sqrt{x})-1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+6x+o(x)-1}{2x} = 3 = F(0)\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo di f. Pertanto, F risulta continua nell'origine.