SOLUZIONI COMPITO del 5/06/2014
ANALISI MATEMATICA I - 5 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno arbitrario (in funzione del parametro reale x), pertanto cominciamo a considerarne il modulo. Osserviamo anche che $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, come risulta dalla risoluzione di questa semplice disequazione. Pertanto, per $x \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$\left|\frac{1}{n\log^2(n+1)}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n\right| \leq \frac{1}{n\log^2(n+1)} \sim \frac{1}{n\log^2 n}\,.$$

Ricordando che quest'ultimo è il termine generale di una serie di Abel convergente (in quanto $p = 1$ e $q = 2$), dal criterio del confronto e del confronto asintotico, si ricava che la serie è assollutamente e semplicemente convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2
Utilizzando il metodo di riduzione degli integrali doppi, l'integrale proposto si può riscrivere come segue

$$\begin{aligned}\iint_D y\,\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx\,dy &= \int_1^2 y\left(\int_0^{y^4-1}\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx\right)dy = \int_1^2 y\left(2e^{\sqrt{x+1}}\Big|_0^{y^4-1}\right)dy \\ &= \int_1^2 2y\left(e^{y^2} - e\right)dy = (e^{y^2} - e\,y^2)\Big|_1^2 = e^4 - 4e - e + e = e^4 - 4e\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3
Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{y^2(x)+1}{y(x)}\,\frac{1}{x^2+4}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{2}\log(y^2+1) = \int\frac{y}{y^2+1}\,dy = \int\frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{(x/2)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\arctan\frac{x}{2} + C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $C = \frac{1}{2}\log 3$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{3\exp\left(\arctan\frac{x}{2}\right) - 1}\,.$$

Esercizio 4
Poiché la funzione proposta è di classe $\mathcal{C}^\infty(D)$, per studiarne i punti critici procediamo calcolando e annullando il suo gradiente. Otteniamo in tal modo

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 6xy - 6x = 3x(x+2y-2) = 0\,, \\ f_y(x,y) = 3y + 3x^2 = 3(y+x^2) = 0\,, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x = 0 \quad \text{oppure} \quad x + 2y - 2 = 0\,, \\ y + x^2 = 0\,, \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} x = 0\,, \\ y = 0\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = -x^2\,, \\ -2x^2 + x - 2 = 0\,, \end{cases} \quad \text{che non è risolubile.}$$

Pertanto, l'unico punto stazionario è $(0,0)$. Calcolando, ora, la matrice Hessiana in tale punto, otteniamo subito che essa è indefinita, in quanto $f_{xx}(0,0) = (6x + 6y - 6)\Big|_{(x,y)=0} = -6$, $f_{yy}(0,0) = 3$ e $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 6x\Big|_{(x,y)=0} = 0$. Pertanto, $(0,0)$ è un punto di sella.

Esercizio 5

L'affermazione $A)$ è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$, che fornisce il termine generale $n^2 \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = n \not\to 0$, quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie.
L'affermazione $B)$ è vera, in quanto, per ipotesi, $nf^2(\sqrt{n}) \sim n \frac{1}{(\sqrt{n})^4} = \frac{1}{n}$, che è il termine generale della serie armonica. Poiché la serie armonica diverge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta diverge.
L'affermazione $C)$ è vera, in quanto, per ipotesi, $\sqrt{n} f^2(\sqrt{n}) \sim \sqrt{n} \frac{1}{(\sqrt{n})^4} = \frac{1}{n^{3/2}}$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$. Poiché tale serie converge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta converge.