SOLUZIONI COMPITO dello 06/07/2009
ANALISI 1 - ELETTRICA 5 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Dalla formula risolutiva per le equazioni di secondo grado si ottiene

$$z = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)]\,, \quad z_2 = 2\sqrt{2}[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)]\,.$$

Esercizio 2
La funzione f sarà definita una volta imposta la condizione $2x+1 > 0$ che ha come soluzione $x > -1/2$; quindi $C.E.(f) = (-1/2, +\infty)$. Per stabilire se la funzione proposta è prolungabile con continuità in $x = -1/2$, calcoliamo

$$\lim_{x\to -1/2^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\log t = 0^-,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo effettuato il cambio di variabile $t = 2x+1$ e, nella terza, abbiamo utilizzato un limite notevole. Quindi f è prolungabile con continuità in $x = -1/2$ mediante la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > -1/2, \\ 0 & \text{se } x = -1/2. \end{cases}$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'integrale generale si può ottenere utilizzando la formula risolutiva, una volta calcolati i seguenti integrali:

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \log(1+\sin^2 x) + C\,;$$

$$\int e^{\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx}\cos x\,dx = \int e^{\log(1+\sin^2 x)}\cos x\,dx = \int (1+\sin^2 x)\cos x\,dx = \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C\,.$$

Da ciò si ricava

$$y(x) = Ce^{-\log(1+\sin^2 x)} + e^{-\log(1+\sin^2 x)}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x\right) = \frac{C + \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x}{1+\sin^2 x}\,.$$

Esercizio 4
Osserviamo che

$$\left|(-1)^n \frac{n+1}{n^{5/2}+2}\right| = \frac{n+1}{n^{5/2}+2} \sim \frac{n}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}\,.$$

Poiché $3/2 > 1$, si ha che la serie proposta converge assolutamente, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.