SOLUZIONI COMPITO dello 06/07/2009
ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

a) Dalla formula risolutiva per le equazioni di secondo grado si ottiene

$$z = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i \quad \Longrightarrow \quad z_1 = 2\sqrt{2}[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)]\,, \quad z_2 = 2\sqrt{2}[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)]\,.$$

b) $z_1^{17} \cdot z_2^{25} = (2\sqrt{2})^{42} e^{17\pi i/4} e^{-25\pi i/4} = 2^{63} e^{-2\pi i} = 2^{63}$.

Esercizio 2

La funzione f sarà definita una volta imposta la condizione $2x+1 > 0$ che ha come soluzione $x > -1/2$; quindi $C.E.(f) = (-1/2, +\infty)$. Per stabilire se la funzione proposta è prolungabile con continuità in $x = -1/2$, calcoliamo

$$\lim_{x \to -1/2^+} f(x) = \lim_{t \to 0^+} \sqrt{t}\log t = 0^-,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo effettuato il cambio di variabile $t = 2x+1$ e, nella terza, abbiamo utilizzato un limite notevole. Quindi f è prolungabile con continuità in $x = -1/2$ mediante la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > -1/2, \\ 0 & \text{se } x = -1/2. \end{cases}$$

Stabiliamo ora se $\tilde{f}$ è derivabile in $x = -1/2$, calcolando il rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(-1/2+h) - \tilde{f}(-1/2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{2h}\log(2h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sqrt{2}\,\frac{\log(2h)}{\sqrt{h}} = -\infty\,.$$

Pertanto la funzione non è prolungabile con derivabilità in $x = -1/2$, dove presenta, invece, una tangente verticale.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'integrale generale si può ottenere utilizzando la formula risolutiva, una volta calcolati i seguenti integrali:

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \log(1+\sin^2 x) + C\,;$$

$$\int e^{\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx} \cos x\,dx = \int e^{\log(1+\sin^2 x)} \cos x\,dx = \int (1+\sin^2 x)\cos x\,dx = \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C\,.$$

Da ciò si ricava

$$y(x) = Ce^{-\log(1+\sin^2 x)} + e^{-\log(1+\sin^2 x)}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x\right) = \frac{C + \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x}{1+\sin^2 x}\,.$$

Esercizio 4

Per $\alpha > 1$, si ottiene

$$\left|(-1)^n \frac{n+1}{n^{2\alpha}+2}\right| = \frac{n+1}{n^{2\alpha}+2} \sim \frac{n}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^{2\alpha-1}}\,.$$

Poiché $\alpha > 1$ implica $2\alpha - 1 > 1$, si ha che la serie proposta converge assolutamente, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.

Per $\alpha = 1$, posto $a_n := \frac{n+1}{n^2+2} \sim \frac{1}{n} \to 0$, si ottiene che la serie proposta non converge assolutamente. Tuttavia essa converge semplicemente per il criterio di Leibniz, in quanto risulta essere una serie a termini di segno alterno, tale che a_n è infinitesima e decrescente. Infatti, si ha

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} \leq \frac{n+1}{n^2+2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^3+2n^2+2n+4 \leq n^3+2n^2+3n+n^2+2n+3$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 5

La risposta 1) è errata, basta considerare la funzione $f(x) = \arctan x$, che soddisfa tutte le ipotesi ed inoltre esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi/2$.

La risposta 2) è errata, basta considerare la funzione $f(x) = \sin x$, che soddisfa tutte le ipotesi, ma $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste.

La risposta 3) è corretta poiché, essendo f limitata per ipotesi, significa che esiste una costante $M > 0$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto, passando al limite, si ottiene anche che, se esso esiste, deve soddifare le medesime limitazioni. Quindi la funzione non può mai divergere.

La risposta 4) è errata, basta considerare di nuovo la funzione $f(x) = \arctan x$, che soddisfa tutte le ipotesi ed inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi/2 \neq 1$.

Esercizio 6

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, pertanto per determinare i suoi punti critici e studiarne la natura possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Imponiamo, dapprima, l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -3y^2 + 6y = 0; \\ f_y(x,y) = -6y^2 - 6xy + 6y + 6x = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} -y^2 + 2y = 0; \\ y^2 + xy - y - x = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0; \\ x = 0; \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y = 2; \\ 4 + 2x - 2 - x = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = 2; \\ x = -2. \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (-2,2)$. Calcoliamo ora la matrice Hessiana di f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -6y+6 \\ -6y+6 & -12y-6x+6 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava

$$det\big(H_f(P_1)\big) = \left|\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\right| = -36 < 0 \qquad \text{e} \qquad det\big(H_f(P_2)\big) = \left|\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}\right| = -36 < 0\,.$$

Pertanto entrambi i punti stazionari P_1 e P_2 sono punti di sella.

TEMA B

Esercizio 1

a) Dalla formula risolutiva per le equazioni di secondo grado si ottiene

$$z = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2i$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}[\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)]\,, \quad z_2 = 2\sqrt{2}[\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)]\,.$$

b) $z_1^{17} \cdot z_2^9 = (2\sqrt{2})^{26}\mathrm{e}^{51\pi i/4}\mathrm{e}^{-27\pi i/4} = 2^{39}\mathrm{e}^{6\pi i} = 2^{39}$.

Esercizio 2

La funzione f sarà definita una volta imposta la condizione $x + 2 > 0$ che ha come soluzione $x > -2$; quindi $C.E.(f) = (-2, +\infty)$. Per stabilire se la funzione proposta è prolungabile con continuità in $x = -2$, calcoliamo

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\log t = 0^-,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo effettuato il cambio di variabile $t = x + 2$ e, nella terza, abbiamo utilizzato un limite notevole. Quindi f è prolungabile con continuità in $x = -2$ mediante la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > -2, \\ 0 & \text{se } x = -2. \end{cases}$$

Stabiliamo ora se $\tilde{f}$ è derivabile in $x = -2$, calcolando il rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\tilde{f}(-2+h) - \tilde{f}(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}\log h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\log h}{\sqrt{h}} = -\infty\,.$$

Pertanto la funzione non è prolungabile con derivabilità in $x = -2$, dove presenta, invece, una tangente verticale.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'integrale generale si può ottenere utilizzando la formula risolutiva, una volta calcolati i seguenti integrali:

$$\int (-\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x})\,dx = -\int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = \log(1+\cos^2 x) + C\,;$$

$$\int \mathrm{e}^{-\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx} \sin x\,dx = \int \mathrm{e}^{\log(1+\cos^2 x)}\sin x\,dx = \int (1+\cos^2 x)\sin x\,dx = -\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C\,.$$

Da ciò si ricava

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-\log(1+\cos^2 x)} + \mathrm{e}^{-\log(1+\cos^2 x)}\left(-\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right) = \frac{C - \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,.$$

Esercizio 4

Per $\alpha > 1$, si ottiene

$$\left|(-1)^n \frac{n+2}{n^{2\alpha}+1}\right| = \frac{n+2}{n^{2\alpha}+1} \sim \frac{n}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^{2\alpha-1}}\,.$$

Poiché $\alpha > 1$ implica $2\alpha - 1 > 1$, si ha che la serie proposta converge assolutamente, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.

Per $\alpha = 1$, posto $a_n := \frac{n+2}{n^2+1} \sim \frac{1}{n} \to 0$, si ottiene che la serie proposta non converge assolutamente. Tuttavia essa converge semplicemente per il criterio di Leibniz, in quanto risulta essere una serie a termini di segno alterno, tale che a_n è infinitesima e decrescente. Infatti, si ha

$$a_{n+1} \le a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(n+1)+2}{(n+1)^2+1} \le \frac{n+2}{n^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad n^3+3n^2+n+3 \le n^3+2n^2+2n+2n^2+4n+4$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata per ogni $n \ge 1$.

Esercizio 5

La risposta 1) è errata, basta considerare la funzione $f(x) = \arctan x$, che soddisfa tutte le ipotesi, ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi/2 \neq 0$.

La risposta 2) è errata, basta considerare di nuovo la funzione $f(x) = \arctan x$, che soddisfa tutte le ipotesi, ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi/2 \neq -\infty$.

La risposta 3) è errata, basta considerare di nuovo la funzione $f(x) = \arctan x$, che soddisfa tutte le ipotesi, ma non è periodica.

La risposta 4) è corretta, poiché, per avere un asintoto obliquo a $+\infty$, la funzione dovrebbe innanzitutto divergere, ma, essendo f limitata per ipotesi, significa che esiste una costante $M > 0$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, passando al limite, si ottiene che, se esso esiste, deve soddifare le medesime limitazioni e quindi la funzione non può mai divergere.

Esercizio 6

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, pertanto per determinare i suoi punti critici e studiarne la natura possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Imponiamo, dapprima, l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -3y^2 + 6y = 0; \\ f_y(x,y) = -6y^2 - 6xy + 6y + 6x = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} -y^2 + 2y = 0; \\ y^2 + xy - y - x = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0; \\ x = 0; \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y = 2; \\ 4 + 2x - 2 - x = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = 2; \\ x = -2. \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (-2,2)$. Calcoliamo ora la matrice Hessiana di f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -6y + 6 \\ -6y + 6 & -12y - 6x + 6 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava

$$det\big(H_f(P_1)\big) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \right| = -36 < 0 \qquad \text{e} \qquad det\big(H_f(P_2)\big) = \left| \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \right| = -36 < 0\,.$$

Pertanto entrambi i punti stazionari P_1 e P_2 sono punti di sella.