SOLUZIONI APPELLO del 06/07/2018
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $t = x - 1$, da cui $x = 1 + t$, ricaviamo che il limite proposto si riscrive nella forma

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log x \, \log(x-1)}{[\sin(x-1)]^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1+t)\, \log t}{(\sin t)^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t \, \log t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log t}{t} = -\infty\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che, per $t \to 0$, $\log(1+t) \sim t$ e $\sin t \sim t$.

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che se $\alpha \notin [2, +\infty)$, la funzione proposta è ivi continua e quindi, per stabilire se l'integrale improprio converge, basta studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. In tal caso, otteniamo

$$\frac{1}{(x-\alpha)^2} \sim \frac{1}{x^2}\,, \qquad \text{per } x \to +\infty$$

che è impropriamente integrabile, per confronto con l'iperbole di esponente $2 > 1$.
Se, invece, $\alpha \in [2, +\infty)$, la funzione (pur restando impropriamente integrabile all'infinito) ha un'ulteriore improprietà in $x = \alpha$. Tuttavia, per $x \to \alpha$, si ricava subito che essa non è impropriamente integrabile, in quanto coincide con un'iperbole di esponente $2 > 1$, che non è integrabile al finito.

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che ha come soluzioni singolari $y(x) \equiv 0$ e $y(x) \equiv -2$. Inoltre, posta $f(x) = 1$ e $g(y) = y(y+2)$, poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il problema proposto ammette un'unica soluzione di classe $\mathcal{C}^1$ in un opportuno intorno dell'origine. Pertanto, per $\alpha = 0$, l'unica soluzione è l'integrale singolare $y(x) \equiv 0$ e, per $\alpha = -2$, l'unica soluzione è l'integrale singolare $y(x) \equiv -2$. Se, invece, $\alpha \neq 0; -2$, separando le variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{2} \log \frac{|y|}{|y+2|} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y}\, dy - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y+2}\, dy = \int \frac{dy}{y(y+2)}\, dy = \int dx = x + c\,.$$

Invertendo e inglobando il segno nella costante moltiplicativa, si ricava

$$\log \frac{|y(x)|}{|y(x)+2|} = 2x + 2c \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y(x)}{y(x)+2} = k\mathrm{e}^{2x} \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \frac{2k\mathrm{e}^{2x}}{1 - k\mathrm{e}^{2x}}\,,$$

dove abbiamo posto $k = \pm \mathrm{e}^{2c}$. Imponendo la condizione iniziale, si ottiene

$$\alpha = \frac{2k}{1-k} \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{\alpha}{2+\alpha}\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \frac{2\alpha \mathrm{e}^{2x}}{2 + \alpha - \alpha \mathrm{e}^{2x}}\,.$$

Osserviamo che, per $\alpha = 0; -2$, si riottengono anche le soluzioni singolari.

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che bisogna imporre la condizione d'esistenza, fornita da $z \neq 0$. Inoltre, ponendo $z = a + ib$, da cui $\overline{z} = a - ib$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\frac{\overline{z}^2 + z^2}{|z|^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - 2iab - b^2 + a^2 + 2iab - b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2a^2 - 2b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm b\,.$$

Pertanto, si ricava che l'equazione proposta ammette infinite soluzioni date da $z = b \pm ib$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dal punto di vista grafico, le soluzioni sono date da tutti i punti delle due bisettrici (primaria e secondaria), escluso il punto d'intersezione, costituito dall'origine.

Esercizio 5

1) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.
2) Ponendo $f(x) = \log x - \log 2 - \arctan(x-1)$, si osserva che essa è continua nell'intervallo $[2, +\infty)$ ed inoltre $f(x) \to +\infty > 0$, per $x \to +\infty$, mentre $f(2) = \log 2 - \log 2 - \arctan 1 = -\pi/4 < 0$. Quindi, dal Teorema degli zeri, ricaviamo che esiste almeno un punto $x_0 \in (2, +\infty)$ tale che $f(x_0) = 0$. Osserviamo anche che f è derivabile e che

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1-x}{x[1+(x-1)^2]} = \frac{x^2-3x+1}{x[1+(x-1)^2]} > 0 \qquad \text{in } [2, +\infty),$$

dove abbiamo tenuto conto che il polinomio $x^2 - 3x + 1$, avendo il discriminante negativo, è sempre strettamente positivo. Pertanto, f è strettamente monotona e, quindi, la soluzione x_0 trovata è unica.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $t = x + 2$, da cui $x = t - 2$, ricaviamo che il limite proposto si riscrive nella forma

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{[\sin(x+2)]^3}{\log(x+2)\,[\log(3+x)]^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\sin t)^3}{\log t[\log(1+t)]^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3}{(\log t)t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\log t} = 0^- \,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che, per $t \to 0$, $\log(1+t) \sim t$ e $\sin t \sim t$.

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che se $\alpha \notin (-\infty, -3]$, la funzione proposta è ivi continua e quindi, per stabilire se l'integrale improprio converge, basta studiarne il comportamento per $x \to -\infty$. In tal caso, otteniamo

$$\frac{1}{(x-\alpha)^3} \sim \frac{1}{x^3}\,, \qquad \text{per } x \to -\infty$$

che è impropriamente integrabile, per confronto con l'iperbole di esponente $3 > 1$.
Se, invece, $\alpha \in (-\infty, -3]$, la funzione (pur restando impropriamente integrabile all'infinito) ha un'ulteriore improprietà in $x = \alpha$. Tuttavia, per $x \to \alpha$, si ricava subito che essa non è impropriamente integrabile, in quanto coincide con un'iperbole di esponente $3 > 1$, che non è integrabile al finito.

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che ha come soluzioni singolari $y(x) \equiv 0$ e $y(x) \equiv 4$. Inoltre, posta $f(x) = 1$ e $g(y) = y(y-4)$, poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il problema proposto ammette un'unica soluzione di classe $\mathcal{C}^1$ in un opportuno intorno dell'origine. Pertanto, per $\alpha = 0$, l'unica soluzione è l'integrale singolare $y(x) \equiv 0$ e, per $\alpha = 4$, l'unica soluzione è l'integrale singolare $y(x) \equiv 4$. Se, invece, $\alpha \neq 0; 4$, separando le variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{4}\log\frac{|y-4|}{|y|} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y-4}\,dy - \frac{1}{4}\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{dy}{y(y-4)}\,dy = \int dx = x + c\,.$$

Invertendo e inglobando il segno nella costante moltiplicativa, si ricava

$$\log\frac{|y(x)-4|}{|y(x)|} = 4x + 4c \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y(x)-4}{y(x)} = k\mathrm{e}^{4x} \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \frac{4}{1-k\mathrm{e}^{4x}}\,,$$

dove abbiamo posto $k = \pm \mathrm{e}^{4c}$. Imponendo la condizione iniziale, si ottiene

$$\alpha = \frac{4}{1-k} \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{\alpha-4}{\alpha}\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \frac{4\alpha}{\alpha - (\alpha-4)\mathrm{e}^{4x}}\,.$$

Osserviamo che, per $\alpha = 0; 4$, si riottengono anche le soluzioni singolari.

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che bisogna imporre la condizione d'esistenza, fornita da $z \neq 0$. Inoltre, ponendo $z = a + ib$, da cui $\overline{z} = a - ib$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\frac{\overline{z}^2 - z^2}{|z|^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - 2iab - b^2 - a^2 - 2iab + b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -4iab = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \text{ o } b = 0\,.$$

Pertanto, si ricava che l'equazione proposta ammette infinite soluzioni date da $z = a$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, oppure $z = ib$, con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dal punto di vista grafico, le soluzioni sono date da tutti i punti dei due assi coordinati (asse x e asse y), escluso il punto d'intersezione, costituito dall'origine.

Esercizio 5

1) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.
2) Ponendo $f(x) = \log x - \log 2 - \arctan(x-1)$, si osserva che essa è continua nell'intervallo $[2, +\infty)$ ed inoltre $f(x) \to +\infty > 0$, per $x \to +\infty$, mentre $f(2) = \log 2 - \log 2 - \arctan 1 = -\pi/4 < 0$. Quindi, dal Teorema degli zeri, ricaviamo che esiste almeno un punto $x_0 \in (2, +\infty)$ tale che $f(x_0) = 0$. Osserviamo anche che f è derivabile e che

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2 - x}{x[1+(x-1)^2]} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x[1+(x-1)^2]} > 0 \qquad \text{in } (2, +\infty),$$

dove abbiamo tenuto conto che il polinomio $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ è sempre strettamente positivo in $(2, +\infty)$. Pertanto, f è strettamente monotona e, quindi, la soluzione x_0 trovata è unica.