SOLUZIONI COMPITO dello 06/09/2011
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
L'equazione proposta non ammette alcuna soluzione, poiché il termine di sinistra è un numero reale, mentre quello di destra è un numero immaginario puro non nullo.

Esercizio 2
Osserviamo che il limite proposto è un caso di indecisione del tipo $[1^\infty]$, pertanto conviene riscrivere la successione nella forma

$$\left(1+\sin\frac{3}{n}\right)^{\frac{2n^2+n}{3n-5}} = \exp\left\{\log\left[\left(1+\sin\frac{3}{n}\right)^{\frac{2n^2+n}{3n-5}}\right]\right\} = \exp\left[\left(\frac{2n^2+n}{3n-5}\right)\log\left(1+\sin\frac{3}{n}\right)\right].$$

Utilizzando il fatto che $\log\left(1+\sin\frac{3}{n}\right)\sim\sin\frac{3}{n}\sim\frac{3}{n}$ e ricordando la gerarchia degli infiniti, otteniamo

$$\left(\frac{2n^2+n}{3n-5}\right)\log\left(1+\sin\frac{3}{n}\right)\sim\frac{2n^2}{3n}\,\frac{3}{n}\to 2\,.$$

Pertanto, il limite proposto vale e^2.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzioni singolari le funzioni costanti $y(x)\equiv k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Poiché per $y\neq(2k+1)\pi/2$ il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione, avremo che la funzione $y(x)=\pi$, ottenuta dall'integrale singolare per $k=1$, è l'unica soluzione del problema di Cauchy nel caso in cui $\alpha=\pi$. Invece, per $\alpha=\pi/4$, cercheremo l'unica soluzione fra gli integrali ottenuti per separazione di variabili. Ponendo $y\neq k\pi$ e $y\neq(2k+1)\pi/2$, otteniamo

$$-\frac{1}{\sin y}=\int\frac{\cos y}{\sin^2 y}\,dy=2\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx=\arctan^2 x+C$$
$$\Longrightarrow\quad \sin y(x)=-\frac{1}{\arctan^2 x+C}\qquad\text{ovvero}\qquad y(x)=-\arcsin\left(\frac{1}{\arctan^2 x+C}\right),$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato la simmetria dispari della funzione $x\mapsto\arcsin x$. Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $\pi/4=y(0)=-\arcsin\frac{1}{C}$, che fornisce $\frac{1}{C}=-\sin(\pi/4)=-\sqrt{2}/2$ (anche qui abbiamo utilizzato la simmetria dispari della funzione $x\mapsto\sin x$). Quindi $C=-\sqrt{2}$ e la soluzione richiesta è

$$y(x)=-\arcsin\left(\frac{1}{\arctan^2 x-\sqrt{2}}\right).$$

Esercizio 4
Il campo d'esistenza della funzione proposta si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases}-1\le 1-\log(1+3x)\le 1\,,\\ 1+3x>0\,,\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{cases}\log(1+3x)\le 2\,,\\ \log(1+3x)\ge 0\,,\\ 3x>-1\,,\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+3x\le \mathrm{e}^2\,,\\ 1+3x\ge 1\,,\\ x>-1/3\,,\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{cases}x\le\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{3}\\ x\ge 0\\ x>-1/3\end{cases}$$

da cui si ricava $0 \leq x \leq \frac{\mathrm{e}^2-1}{3}$. Per determinare il segno di f, basta tener conto che la funzione $x \mapsto \arcsin x$ è concorde con il segno del suo argomento. Pertanto

$$\arcsin\big(1-\log(1+3x)\big) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1-\log(1+3x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \log(1+3x) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{\mathrm{e}-1}{3}\,.$$

Pertanto avremo che

$$\begin{aligned} &\arcsin\big(1-\log(1+3x)\big) > 0 \qquad \text{se} \qquad 0 \leq x < \frac{\mathrm{e}-1}{3}\,,\\ &\arcsin\big(1-\log(1+3x)\big) < 0 \qquad \text{se} \qquad \frac{\mathrm{e}-1}{3} < x \leq \frac{\mathrm{e}^2-1}{3}\,,\\ &\arcsin\big(1-\log(1+3x)\big) = 0 \qquad \text{se} \qquad x = \frac{\mathrm{e}-1}{3}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

Ricordiamo che lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione h sarà dato da

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + o(x^2)\,.$$

Dobbiamo, quindi, calcolare $h(0)$, $h'(0)$ e $h''(0)$. Dal teorema di derivazione della funzione composta si ottiene

$$\begin{aligned} &h(0) = g(f(0)) = g(0) = 0\,,\\ &h'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(0)f'(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\,,\\ &h''(0) = g''(f(0))(f'(0))^2 + g'(f(0))f''(0) = 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} = 4\,. \end{aligned}$$

Pertanto avremo

$$h(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{4}{2}x^2 + o(x^2) = x + 2x^2 + o(x^2)\,.$$

TEMA B

Esercizio 1
L'equazione proposta non ammette alcuna soluzione, poiché il termine di destra è un numero reale non nullo, mentre quello di sinistra è un numero immaginario puro.

Esercizio 2
Osserviamo che il limite proposto è un caso di indecisione del tipo $[1^\infty]$, pertanto conviene riscrivere la successione nella forma

$$\left(1-\tan\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{n^3+5n}{2n+7}} = \exp\left\{\log\left[\left(1-\tan\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{n^3+5n}{2n+7}}\right]\right\} = \exp\left[\left(\frac{n^3+5n}{2n+7}\right)\log\left(1-\tan\frac{4}{n^2}\right)\right].$$

Utilizzando il fatto che $\log\left(1-\tan\frac{4}{n^2}\right) \sim -\tan\frac{4}{n^2} \sim -\frac{4}{n^2}$ e ricordando la gerarchia degli infiniti, otteniamo

$$\left(\frac{n^3+5n}{2n+7}\right)\log\left(1-\tan\frac{4}{n^2}\right) \sim -\frac{n^3}{2n}\,\frac{4}{n^2} \to -2\,.$$

Pertanto, il limite proposto vale $\mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzioni singolari le funzioni costanti $y(x) \equiv (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché per $y \neq k\pi$ il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione, avremo che la funzione $y(x) = \pi/2$, ottenuta dall'integrale singolare per $k = 0$, è l'unica soluzione del problema di Cauchy nel caso in cui $\alpha = \pi/2$. Invece, per $\alpha = \pi/4$, cercheremo l'unica soluzione fra gli integrali ottenuti per separazione di variabili. Ponendo $y \neq (2k+1)\pi/2$ e $y \neq k\pi$, otteniamo

$$\frac{1}{\cos y} = \int \frac{\sin y}{\cos^2 y}\,dy = 3\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}\,dx = \arctan^3 x + C$$
$$\Longrightarrow \quad \cos y(x) = \frac{1}{\arctan^3 x + C} \qquad \text{ovvero} \qquad y(x) = \arccos\left(\frac{1}{\arctan^3 x + C}\right).$$

Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $\pi/4 = y(0) = \arccos\frac{1}{C}$, che fornisce $\frac{1}{C} = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Quindi $C = \sqrt{2}$ e la soluzione richiesta è

$$y(x) = \arccos\left(\frac{1}{\arctan^3 x + \sqrt{2}}\right).$$

Esercizio 4
Il campo d'esistenza della funzione proposta si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 6\arcsin(4x-3/2) - \pi > 0\,, \\ -1 \le 4x - 3/2 \le 1\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \arcsin(4x-3/2) > \pi/6\,, \\ 4x - 3/2 \ge -1\,, \\ 4x - 3/2 \le 1\,, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x - 3/2 > \sin(\pi/6) = 1/2\,, \\ 4x \ge 1/2\,, \\ 4x \le 5/2\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x > 1/2 \\ x \ge 1/8 \\ x \le 5/8 \end{cases}$$

da cui si ricava $1/2 < x \le 5/8$. Per determinare il segno di f, dobbiamo imporre

$$\log\big(6\arcsin(4x-3/2) - \pi\big) - \log\pi > 0 \iff 6\arcsin(4x-3/2) - \pi > \pi \iff$$
$$\arcsin(4x-3/2) > \pi/3 \iff 4x - 3/2 > \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \iff x > \frac{\sqrt{3}+3}{8}\,.$$

Pertanto avremo che

$$\begin{aligned}
&\log\big(6\arcsin(4x-3/2)-\pi\big)-\log\pi<0 \qquad &&\text{se} \qquad 1/2<x<(3+\sqrt{3})/8\,,\\
&\log\big(\pi+6\arcsin(4x-3/2)\big)-\log\pi>0 \qquad &&\text{se} \qquad (3+\sqrt{3})/8<x\le 5/8\,,\\
&\log\big(\pi+6\arcsin(4x-3/2)\big)-\log\pi=0 \qquad &&\text{se} \qquad x=(3+\sqrt{3})/8\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Ricordiamo che lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione h sarà dato da

$$h(x)=h(0)+h'(0)x+\frac{h''(0)}{2}x^2+o(x^2)\,.$$

Dobbiamo, quindi, calcolare $h(0)$, $h'(0)$ e $h''(0)$. Dal teorema di derivazione della funzione composta si ottiene

$$\begin{aligned}
&h(0)=g(f(0))=g(0)=0\,,\\
&h'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(0)f'(0)=2\cdot\frac{1}{2}=1\,,\\
&h''(0)=g''(f(0))(f'(0))^2+g'(f(0))f''(0)=4\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{2}=4\,.
\end{aligned}$$

Pertanto avremo

$$h(x)=0+1\cdot x+\frac{4}{2}x^2+o(x^2)=x+2x^2+o(x^2)\,.$$