AUTOVALUTAZIONE 6 dicembre 2002	cognome e nome	matricola

E1*. Calcolare

$$I = \int_1^{e} \frac{(\log x)^4}{x}\, dx \ .$$

E2. Stabilire, per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, esiste finito il seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x e^{\alpha x}}{(1+x^2)(\log x)^{2+\alpha}}\, dx \ .$$

E3. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log^3(1+|x-1|)}{(x-1)^2+y^2} + e^y & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \ , \\ 1 & \text{se } (x,y) = (1,0) \ . \end{cases}$$

E3.1* Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

E3.2 Stabilire se f è continua e differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e calcolare, qualora esista, la derivata di f nel punto $(1,0)$, lungo la direzione normale nel punto $(1,0)$ al cerchio di centro $(1,1)$ e raggio 1.

E4. Sia data l'equazione differenziale

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = f_n(x) \ .$$

E4.1* Posta $f_n(x) \equiv 0$, determinare la soluzione $y(x)$ della precedente equazione, che soddisfi le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

E4.2 Posta $f_n(x) = e^{-nx}$, determinare, per ogni $n \geq 3$, la soluzione della precedente equazione, che soddisfi le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1/n$, e calcolare $\lim_{n\to+\infty} y_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Tempo: 3 ore . Per ottenere la sufficienza è necessario risolvere gli esercizi contrassegnati da * .