SOLUZIONI COMPITO DI AUTOVALUTAZIONE

Esercizio 1. Effettuando la sostituzione di variabile $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\, dx$, $t(1) = 0$ e $t(\mathrm{e}) = 1$, si ottiene

$$I = \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5} \; .$$

Esercizio 2. La funzione f va studiata in un intorno di $x = 1$ e di $+\infty$. In $U(1^+)$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2[\log\left(1 + (x-1)\right)]^{2+\alpha}} \sim \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2(x-1)^{2+\alpha}}$$

che è integrabile in senso improprio se e solo se $2 + \alpha < 1$, ovvero $\alpha < -1$. In $U(+\infty)$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{x\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^2(\log x)^{2+\alpha}} \sim \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x(\log x)^{2+\alpha}} \leq \mathrm{e}^{\alpha x} \qquad \text{per} \;\; x >> 1$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, si è tenuto conto del fatto che $x(\log x)^{2+\alpha} \to +\infty$, per $x \to +\infty$ e per ogni $\alpha \in I\!R$. Poiché la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ è integrabile in senso improprio in $U(+\infty)$ se e solo se $\alpha < 0$ e, nel nostro caso, abbiamo già dovuto richiedere $\alpha < -1$, dal teorema del confronto e del confronto asintotico per gli integrali, si ottiene che la funzione proposta ha integrale finito in $U(+\infty)$.

Concludendo, l'integrale proposto esiste finito per ogni $\alpha < -1$.

Esercizio 3.

- Dalla definizione, si ricava

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1, 0+t) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = 1 \; .$$

- Ovviamente, per $(x,y) \neq (1,0)$, la funzione proposta è continua, in quanto somma, rapporto e composizione di funzioni continue ed inoltre, per $x \neq 1$, è differenziabile in quanto somma, rapporto e composizione di funzioni differenziabili. Cominciamo, pertanto, a studiare il comportamento di f nel punto $(1,0)$. Continuità:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left[\frac{\log^3(1+|x-1|)}{(x-1)^2+y^2} + \mathrm{e}^y\right] = 1 + \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{|x-1|^3}{(x-1)^2+y^2} = 1 = f(1,0) \; ,$$

poiché

$$0 \leq \frac{|x-1|^3}{(x-1)^2+y^2} \leq \frac{|x-1|^3}{(x-1)^2} = |x-1| \to 0 \qquad \text{per} \;\; (x,y) \to (1,0) \; .$$

Pertanto, $f \in \mathcal{C}^0(I\!R^2)$. Osserviamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t, 0) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log^3(1+|t|)}{t^3} = \nexists \; ;$$

pertanto f non ammette derivata parziale rispetto ad x in $(1,0)$ e quindi non è differenziabile in tale punto. Osserviamo, infine, che la direzione $\vec{n}$ normale (supponiamo esterna) nel punto $(1,0)$ al cerchio di centro $(1,1)$ e raggio 1 è proprio la direzione dell'asse y, mentre il verso è opposto a quello dell'asse y, cioè $\vec{n} = -\vec{\mathrm{e}}_2$; pertanto la derivata direzionale richiesta sarà data da

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(1,0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -1 \; .$$

Resta ora da studiare la differenziabilità nei punti dell' asse $x = 1$, con $y_0 \neq 0$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t, y_0) - f(1, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log^3(1+|t|)}{t(t^2+y_0^2)} == \lim_{t\to 0} \frac{|t|^3}{t} = 0 \ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1, y_0+t) - f(1, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{y_0+t} - \mathrm{e}^{y_0}}{t} = \mathrm{e}^{y_0} \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = \mathrm{e}^{y_0} \ .$$

Quindi,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h, y_0+k) - f(1, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(1, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{\log^3(1+|h|)}{h^2+(y_0+k)^2} + \mathrm{e}^{y_0+k} - \mathrm{e}^{y_0} - k\mathrm{e}^{y_0}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$\left[\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|^3}{y_0^2\sqrt{h^2+k^2}}\right] + \mathrm{e}^{y_0}\left[\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^k - 1 - k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right] =$$
$$\left[\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|^3}{y_0^2\sqrt{h^2+k^2}}\right] + \mathrm{e}^{y_0}\left[\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2/2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right] = 0$$

poiché, per $(h, k) \to (0, 0)$, si ha

$$0 \le \frac{|h|^3}{y_0^2\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{1}{y_0^2}\,\frac{|h|^3}{|h|} = \frac{1}{y_0^2}h^2 \to 0 \ ,$$
$$0 \le \frac{\mathrm{e}^{y_0}}{2}\,\frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{\mathrm{e}^{y_0}}{2}\,\frac{k^2}{|k|} = \frac{\mathrm{e}^{y_0}}{2}|k| \to 0 \ .$$

Pertanto, la funzione proposta è differenziabile nei punti della forma $(1, y_0)$, con $y_0 \neq 0$.

Esercizio 4.

- L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e, per $f_n(x) \equiv 0$, omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = -2$, pertanto l'integrale generale sarà

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} \ .$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ottiene $C_1 = -C_2 = 1$, ovvero la soluzione cercata è $y(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}$.

- Assumiamo ora $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$. Utilizzando il metodo di somiglianza e tenendo conto che, per $n \ge 3$, $\lambda = -n$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, si ottiene

$$y_p(x) = \frac{1}{(n-1)(n-2)}\mathrm{e}^{-nx} \ ,$$

da cui, imponendo le condizioni iniziali,

$$y_n(x) = \frac{2n-1}{n(n-1)}\mathrm{e}^{-x} - \frac{2(n-1)}{n(n-2)}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}\mathrm{e}^{-nx} \ .$$

In particolare,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2n-1}{n(n-1)}\mathrm{e}^{-1/n} - \frac{2(n-1)}{n(n-2)}\mathrm{e}^{-2/n} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}\mathrm{e}^{-1}\right] = 0 \ .$$