SOLUZIONI COMPITO del 07/02/2020
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che, nell'equazione proposta, il termine a sinistra è un numero reale, mentre quello a destra è immaginario puro (e non nullo), per cui l'equazione è impossibile.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la serie proposta è a termini non negativi, per ogni valore del parametro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pertanto, applicando il criterio della radice, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n^2+1)3^n}{[\log(1+2|x|)]^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt[n]{2n^2}}{\log(1+2|x|)} = \frac{3}{\log(1+2|x|)} =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{(2n^2+1)} \sim \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \frac{3}{\log(1+2|x|)} < 1$, ovvero $\log(1+2|x|) > 3$, cioè $|x| > (\mathrm{e}^3-1)/2$, che fornisce $x < -(\mathrm{e}^3-1)/2$ oppure $x > (\mathrm{e}^3-1)/2$, la serie converge.
2. Se $\ell = \frac{3}{\log(1+2|x|)} > 1$, cioè $-(\mathrm{e}^3-1)/2 < x < (\mathrm{e}^3-1)/2$, $x \neq 0$, la serie diverge.
3. Se $\ell = \frac{3}{\log(1+2|x|)} = 1$, cioè $x = \pm(\mathrm{e}^3-1)/2$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x = \pm(\mathrm{e}^3-1)/2$ nella serie proposta si ottiene $\sum(2n^2+1)$, che risulta essere una serie divergente, in quanto non soddisfa la condizione necessaria. Pertanto, la serie proposta converge solo per $x < -(\mathrm{e}^3-1)/2$ oppure $x > (\mathrm{e}^3-1)/2$.

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \frac{1}{x}$, per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \frac{1}{x}$, per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \frac{1}{2x^3}$, ed infine per la funzione $t \mapsto \sqrt{1+t}$, con $t = \frac{1}{x^2}$, si ricava

$$\begin{aligned}
&\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
&\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
&\exp\left(\frac{1}{2x^3}\right) = 1 + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
&\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{2x^3}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} - 1 - \frac{1}{2x^3} + 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, l'ordine richiesto è 4.

Esercizio 4

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenena associata sarà $y_0(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$. Dal metodo di somiglianza, si ricava subito che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = 1/2$; pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + 1/2$. Imponendo le condizioni richieste, otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 + 1/2\,, \\ 1 = y(\pi/2) = -C_1 + 1/2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -1/2\,, \\ C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Pertanto, esiste un'infinità di soluzioni del problema proposto, data da

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{2}\,, \qquad C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 5

1. Per la discussione teorica e il teorema relativo si veda il libro di testo. Come esempi possiamo considerare le funzioni $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ e $f(x) = |x+1|$.

2. L'affermazione 1) è corretta, in quanto la derivabilità di f su $\mathbb{R}$ implica la sua continuità su tutto l'asse reale e la relazione proposta stabilisce proprio la continuità di f nel punto $x_0 = 2$.
L'affermazione 2) è falsa, in quanto la continuità di f non implica la sua derivabilità né, tanto meno la continuità della sua derivata. Ad esempio, prendento $f(x) = |x-2|$, la funzione non è derivabile in $x_0 = 2$, cioè non esiste $f'(2)$; quindi la relazione proposta non si può neppure scrivere.
L'affermazione 3) è corretta, in quanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{f'(2)}{4} \in \mathbb{R}\,,$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato la derivabilità di f nel punto $x_0 = 2$, per garantire che il limite del rapporto incrementale esista finito.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che, nell'equazione proposta, il termine a sinistra è un numero reale, mentre quello a destra è immaginario puro (e non nullo), per cui l'equazione è impossibile.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la serie proposta è a termini non negativi, per ogni valore del parametro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pertanto, applicando il criterio della radice, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n^2+n+1)2^n}{[\log(1+3|x|)]^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt[n]{3n^2}}{\log(1+3|x|)} = \frac{2}{\log(1+3|x|)} =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{(3n^2+n+1)} \sim \sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \frac{2}{\log(1+3|x|)} < 1$, ovvero $\log(1+3|x|) > 2$, cioè $|x| > (\mathrm{e}^2-1)/3$, che fornisce $x < -(\mathrm{e}^2-1)/3$ oppure $x > (\mathrm{e}^2-1)/3$, la serie converge.
2. Se $\ell = \frac{2}{\log(1+3|x|)} > 1$, cioè $-(\mathrm{e}^2-1)/3 < x < (\mathrm{e}^2-1)/3$, $x \neq 0$, la serie diverge.
3. Se $\ell = \frac{2}{\log(1+3|x|)} = 1$, cioè $x = \pm(\mathrm{e}^2-1)/3$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x = \pm(\mathrm{e}^2-1)/3$ nella serie proposta si ottiene $\sum(3n^2+n+1)$, che risulta essere una serie divergente, in quanto non soddisfa la condizione necessaria. Pertanto, la serie proposta converge solo per $x < -(\mathrm{e}^2-1)/3$ oppure $x > (\mathrm{e}^2-1)/3$.

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \frac{2}{x}$, per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \frac{1}{x}$, per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \frac{3}{x^3}$, ed infine per la funzione $t \mapsto \sqrt{1+t}$, con $t = \frac{4}{x^2}$, si ricava

$$\begin{aligned}
\log\left(1+\frac{2}{x}\right) &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} - \frac{4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
\sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
\exp\left(\frac{3}{x^3}\right) &= 1 + \frac{3}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} &= 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \log\left(1+\frac{2}{x}\right) + \exp\left(\frac{3}{x^3}\right) - \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\\
&= \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{8}{3x^3} + \frac{4}{x^4} + 1 + \frac{3}{x^3} - 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{6}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, l'ordine richiesto è 4.

Esercizio 4

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica $\lambda^2+1=0$ ha come soluzioni $\lambda = \pm i$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenena associata sarà $y_0(x) = C_1\cos x + C_2 \sin x$. Dal metodo di somiglianza, si ricava subito che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = 2$; pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + 2$. Imponendo le condizioni richieste, otteniamo

$$\begin{cases} 4 = y(-\pi/2) = -C_2 + 2\,,\\ 0 = y(\pi/2) = C_2 + 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_2 = -2\,,\\ C_1 \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Pertanto, esiste un'infinità di soluzioni del problema proposto, data da

$$y(x) = C_1 \cos x - 2 \sin x + 2 \,, \qquad C_1 \in \mathbb{R} \,.$$

Esercizio 5

1. Per la discussione teorica e il teorema relativo si veda il libro di testo. Come esempi possiamo considerare le funzioni $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ e $f(x) = |x+1|$.

2. L'affermazione 1) è corretta, in quanto

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4} \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = -\frac{f'(-2)}{4} \in \mathbb{R} \,,$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato la derivabilità di f nel punto $x_0 = -2$, per garantire che il limite del rapporto incrementale esista finito.
L'affermazione 2) è corretta, in quanto la derivabilità di f su $\mathbb{R}$ implica la sua continuità su tutto l'asse reale e, in particolare, nel punto $x_0 = -2$. Pertanto,

$$\lim_{x \to -2} |x+2| f(x) = \lim_{x \to -2} |x+2| \cdot \lim_{x \to -2} f(x) = 0 \cdot f(-2) = 0 \,.$$

L'affermazione 3) è falsa, in quanto la continuità di f non implica la sua derivabilità né, tanto meno la continuità della sua derivata. Ad esempio, prendento $f(x) = |x+2|$, la funzione non è derivabile in $x_0 = -2$, cioè non esiste $f'(-2)$; quindi la relazione proposta non si può neppure scrivere.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che, nell'equazione proposta, il termine a sinistra è un numero reale, mentre quello a destra è immaginario puro (e non nullo), per cui l'equazione è impossibile.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la serie proposta è a termini non negativi, per ogni valore del parametro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pertanto, applicando il criterio della radice, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2+4)2^n}{[\log(1+2|x|)]^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt[n]{n^2}}{\log(1+2|x|)} = \frac{2}{\log(1+2|x|)} =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{(n^2+4)} \sim \sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \frac{2}{\log(1+2|x|)} < 1$, ovvero $\log(1+2|x|) > 2$, cioè $|x| > (\mathrm{e}^2-1)/2$, che fornisce $x < -(\mathrm{e}^2-1)/2$ oppure $x > (\mathrm{e}^2-1)/2$, la serie converge.
2. Se $\ell = \frac{2}{\log(1+2|x|)} > 1$, cioè $-(\mathrm{e}^2-1)/2 < x < (\mathrm{e}^2-1)/2$, $x \neq 0$, la serie diverge.
3. Se $\ell = \frac{2}{\log(1+2|x|)} = 1$, cioè $x = \pm(\mathrm{e}^2-1)/2$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x = \pm(\mathrm{e}^2-1)/2$ nella serie proposta si ottiene $\sum(n^2+4)$, che risulta essere una serie divergente, in quanto non soddisfa la condizione necessaria. Pertanto, la serie proposta converge solo per $x < -(\mathrm{e}^2-1)/2$ oppure $x > (\mathrm{e}^2-1)/2$.

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \frac{1}{x}$, per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \frac{2}{x}$, per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \frac{2}{x^3}$, ed infine per la funzione $t \mapsto \sqrt{1+t}$, con $t = \frac{2}{x^2}$, si ricava

$$\begin{aligned}
\log\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
\sin\left(\frac{2}{x}\right) &= \frac{2}{x} - \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
\exp\left(\frac{2}{x^3}\right) &= 1 + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} &= 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} - \sin\left(\frac{2}{x}\right) - \exp\left(\frac{2}{x^3}\right) + 2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} - \frac{2}{x} + \frac{4}{3x^3} - 1 - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, l'ordine richiesto è 4.

Esercizio 4

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica $\lambda^2 + 9 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = \pm 3i$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenena associata sarà $y_0(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$. Dal metodo di somiglianza, si ricava subito che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = 1/3$; pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + 1/3$. Imponendo le condizioni richieste, otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 + 1/3\,,\\ 2/3 = y(\pi/3) = -C_1 + 1/3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -1/3\,,\\ C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Pertanto, esiste un'infinità di soluzioni del problema proposto, data da

$$y(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C_2\sin(3x) + 1/3\,, \qquad C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 5

1. Per la discussione teorica e il teorema relativo si veda il libro di testo. Come esempi possiamo considerare le funzioni $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ e $f(x) = |x+1|$.

2. L'affermazione 1) è corretta, in quanto

$$\lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4} \lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = -\frac{f'(-2)}{4} \in \mathbb{R}\,,$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato la derivabilità di f nel punto $x_0 = -2$, per garantire che il limite del rapporto incrementale esista finito.
L'affermazione 2) è corretta, in quanto la derivabilità di f su $\mathbb{R}$ implica la sua continuità su tutto l'asse reale e, in particolare, nel punto $x_0 = -2$. Pertanto,

$$\lim_{x\to -2} |x+2| f(x) = \lim_{x\to -2} |x+2| \cdot \lim_{x\to -2} f(x) = 0 \cdot f(-2) = 0\,.$$

L'affermazione 3) è falsa, in quanto la continuità di f non implica la sua derivabilità né, tanto meno la continuità della sua derivata. Ad esempio, prendento $f(x) = |x+2|$, la funzione non è derivabile in $x_0 = -2$, cioè non esiste $f'(-2)$; quindi la relazione proposta non si può neppure scrivere.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che, nell'equazione proposta, il termine a sinistra è un numero reale, mentre quello a destra è immaginario puro (e non nullo), per cui l'equazione è impossibile.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la serie proposta è a termini non negativi, per ogni valore del parametro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pertanto, applicando il criterio della radice, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n^2+n+2)4^n}{[\log(1+3|x|)]^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4\sqrt[n]{3n^2}}{\log(1+3|x|)} = \frac{4}{\log(1+3|x|)} =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{(3n^2+n+2)} \sim \sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \frac{4}{\log(1+3|x|)} < 1$, ovvero $\log(1+3|x|) > 4$, cioè $|x| > (\mathrm{e}^4-1)/3$, che fornisce $x < -(\mathrm{e}^4-1)/3$ oppure $x > (\mathrm{e}^4-1)/3$, la serie converge.
2. Se $\ell = \frac{4}{\log(1+3|x|)} > 1$, cioè $-(\mathrm{e}^4-1)/3 < x < (\mathrm{e}^4-1)/3$, $x \neq 0$, la serie diverge.
3. Se $\ell = \frac{4}{\log(1+3|x|)} = 1$, cioè $x = \pm(\mathrm{e}^4-1)/3$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x = \pm(\mathrm{e}^4-1)/3$ nella serie proposta si ottiene $\sum(3n^2+n+2)$, che risulta essere una serie divergente, in quanto non soddisfa la condizione necessaria. Pertanto, la serie proposta converge solo per $x < -(\mathrm{e}^4-1)/3$ oppure $x > (\mathrm{e}^4-1)/3$.

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \frac{2}{x}$, per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \frac{2}{x}$, per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \frac{4}{x^3}$, ed infine per la funzione $t \mapsto \sqrt{1+t}$, con $t = \frac{4}{x^2}$, si ricava

$$\begin{aligned}
\log\left(1+\frac{2}{x}\right) &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} - \frac{4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
\sin\left(\frac{2}{x}\right) &= \frac{2}{x} - \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
\exp\left(\frac{4}{x^3}\right) &= 1 + \frac{4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,\\
\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} &= 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+\frac{4}{x^2}} - \exp\left(\frac{4}{x^3}\right) - \sin\left(\frac{2}{x}\right) + \log\left(1+\frac{2}{x}\right)\\
&= 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^4} - 1 - \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x} + \frac{4}{3x^3} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} - \frac{4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{6}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, l'ordine richiesto è 4.

Esercizio 4

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica $\lambda^2 + 16 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = \pm 4i$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenena associata sarà $y_0(x) = C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x)$. Dal metodo di somiglianza, si ricava subito che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = 1/4$; pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x) + 1/4$. Imponendo le condizioni richieste, otteniamo

$$\begin{cases} 1/2 = y(-\pi/8) = -C_2 + 1/4\,, \\ 0 = y(\pi/8) = C_2 + 1/4 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_2 = -1/4\,, \\ C_1 \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Pertanto, esiste un'infinità di soluzioni del problema proposto, data da

$$y(x) = C_1 \cos(4x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{4}, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5

1. Per la discussione teorica e il teorema relativo si veda il libro di testo. Come esempi possiamo considerare le funzioni $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ e $f(x) = |x+1|$.
2. L'affermazione 1) è corretta, in quanto la derivabilità di f su $\mathbb{R}$ implica la sua continuità su tutto l'asse reale e la relazione proposta stabilisce proprio la continuità di f nel punto $x_0 = 2$.
   L'affermazione 2) è falsa, in quanto la continuità di f non implica la sua derivabilità né, tanto meno la continuità della sua derivata. Ad esempio, prendento $f(x) = |x-2|$, la funzione non è derivabile in $x_0 = 2$, cioè non esiste $f'(2)$; quindi la relazione proposta non si può neppure scrivere.
   L'affermazione 3) è corretta, in quanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{f'(2)}{4} \in \mathbb{R},$$

   dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato la derivabilità di f nel punto $x_0 = 2$, per garantire che il limite del rapporto incrementale esista finito.