SOLUZIONI COMPITO del 7/06/2019
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy$, da cui $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, otteniamo $-Im(z^2) = -2xy$ e $|z|^2 = x^2 + y^2$ e quindi possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma

$$\mathrm{e}^{-2xy} < \mathrm{e}^{x^2+y^2} \qquad \Longrightarrow \qquad -2xy < x^2 + y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + y^2 + 2xy > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x + y)^2 > 0\,.$$

Pertanto, l'equazione proposta ha infinite soluzioni date da $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $y \neq -x$; ovvero, le soluzioni sono tutti i punti del piano complesso che giacciono al di fuori della bisettrice secondaria.

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che la serie proposta è una serie a termini negativi (come risulta evidente dal calcolo successivo). Inoltre, posto

$$a_n = \frac{\log\left[\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)\right]}{\log\left(\mathrm{e}^{1/n^3}\right)} = \frac{\log\left[1 + \left(\cos\left(\frac{2}{n^2}\right) - 1\right)\right]}{1/n^3}\,,$$

tenendo conto che $\log(1 + t) \sim t$, con $t = \cos\left(\frac{2}{n^2}\right) - 1$, e che $\cos t - 1 \sim -t^2/2$, con $t = 2/n^2$, si ottiene

$$a_n \sim \frac{\cos\left(\frac{2}{n^2}\right) - 1}{1/n^3} \sim -\frac{2/n^4}{1/n^3} = -\frac{2}{n}\,.$$

Pertanto, la serie è divergente per confronto asintotico con la serie armonica.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Procedendo con la separazione delle variabili e utilizzando il metodo di integrazione per sostituzione (dopo aver posto $t = \log x$, da cui $dx/x = dt$), otteniamo

$$-\frac{1}{y(x)} = \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{x\log^2 x}\,dx = \left(\int \frac{1}{t^2}\,dt\right)\Big|_{t=\log x} = \left(-\frac{1}{t} + C\right)\Big|_{t=\log x} = -\frac{1}{\log x} + C\,,$$

da cui si ricava

$$y(x) = \left(\frac{1}{\log x} - C\right)^{-1}.$$

Imponendo, infine la condizione iniziale $1 = (1 - C)^{-1}$, da cui $C = 0$, si arriva alla soluzione cercata, che è data da

$$y(x) = \left(\frac{1}{\log x}\right)^{-1} = \log x\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione proposta è continua ed è definita su un intervallo chiuso e limitato; pertanto, dal teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di minimo ed un punto di massimo assoluti in $[0, \pi/3]$. Per determinare gli estremanti assoluti e relativi, cominciamo a studiare la monotonia della funzione, attraverso lo studio del segno della derivata. Otteniamo

$$f'(x) = 2\tan x\,\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x}(\tan x - 1)\begin{cases} > 0 & \text{se } \pi/4 < x < \pi/3; \\ = 0 & \text{se } x = \pi/4; \\ < 0 & \text{se } 0 < x < \pi/4. \end{cases}$$

Pertanto, $x = 0; \pi/3$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = \pi/4$ è punto di minimo relativo. Per quanto detto in precedenza, $x = \pi/4$ è necessariamente anche il punto di minimo assoluto e il valore minimo della funzione è dato da $f(\pi/4) = -1$. Infine, per determinare il punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di massimo relativo, ottenendo

$$f(0) = 0 > 3 - 2\sqrt{3} = f(\pi/3)\,,$$

da cui si ricava che il punto di massimo assoluto è $x = 0$ e il valore massimo della funzione è $f(0) = 0$.

Esercizio 5

i) Per quanto riguarda le relazioni tra continuità e derivabilità, gli esempi e controesempi, nonché l'enunciato e la dimostrazione del teorema principale, si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione a) è falsa, poiché essa richiede l'esistenza della derivata anche in un intorno dell'origine e la sua continuità in $x = 0$ (almeno lungo la funzione $x \mapsto \sin x$), che non sono assicurate dalle ipotesi fatte. Ad esempio, basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0} f'(\sin x) = \lim_{x\to 0}\left[2(\sin x)\sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sin x}\right)\right] = -\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \nexists\,.$$

L'affermazione b) è vera, poiché $\lim\limits_{x\to 0}\log(1+x) = 0$ e, per definizione di continuità (utilizzata nella seconda uguaglianza del calcolo seguente), si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f(\log(1+x)) = f\left(\lim_{x\to 0}\log(1+x)\right) = f(0)\,.$$

L'affermazione c) è falsa; infatti, basta considerare la funzione discontinua nell'origine definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0; \\ 1 & \text{se } x < 0; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad a_n = 1/n \to 0\,.$$

In tal caso, poiché $1/n > 0$ e $f(1/n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(1/n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 = f(0)\,.$$

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy$, da cui $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, otteniamo $-Im(z^2) = -2xy$ e $-|z|^2 = -x^2 - y^2$ e quindi possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma

$$\mathrm{e}^{-2xy} > \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \quad \Longrightarrow \quad -2xy > -x^2 - y^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2xy > 0 \quad \Longrightarrow \quad (y-x)^2 > 0\,.$$

Pertanto, l'equazione proposta ha infinite soluzioni date da $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $y \neq x$; ovvero, le soluzioni sono tutti i punti del piano complesso che giacciono al di fuori della bisettrice principale.

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che la serie proposta è una serie a termini positivi (come risulta evidente dal calcolo successivo). Inoltre, posto

$$a_n = \frac{\log\left(\mathrm{e}^{-2/n^4}\right)}{\log\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]} = \frac{-2/n^4}{\log\left[1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right]}\,,$$

tenendo conto che $\log(1+t) \sim t$, con $t = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$, e che $\cos t - 1 \sim -t^2/2$, con $t = 1/n$, si ottiene

$$a_n \sim \frac{-2/n^4}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1} \sim \frac{-2/n^4}{-1/2n^2} = \frac{4}{n^2}\,.$$

Pertanto, la serie proposta è convergente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Procedendo con la separazione delle variabili e utilizzando il metodo di integrazione per parti, otteniamo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y(x)} = \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\log x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C\,, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\log x - C\right)^{-1}\,.$$

Imponendo, infine la condizione iniziale $4 = (1/4 - C)^{-1}$, da cui $C = 0$, si arriva alla soluzione cercata, che è data da

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\log x\right)^{-1}\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione proposta è continua ed è definita su un intervallo chiuso e limitato; pertanto, dal teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di minimo ed un punto di massimo assoluti in $[0, \pi/3]$. Per determinare gli estremanti assoluti e relativi, cominciamo a studiare la monotonia della funzione, attraverso lo studio del segno della derivata. Otteniamo

$$f'(x) = 2\sin x\,\cos x - \sqrt{2}\,\cos x = \cos x(2\sin x - \sqrt{2}) \begin{cases} > 0 & \text{se } \pi/4 < x < \pi/3; \\ = 0 & \text{se } x = \pi/4; \\ < 0 & \text{se } 0 < x < \pi/4. \end{cases}$$

Pertanto, $x = 0; \pi/3$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = \pi/4$ è punto di minimo relativo. Per quanto detto in precedenza, $x = \pi/4$ è necessariamente anche il punto di minimo assoluto e il valore minimo della funzione è dato da $f(\pi/4) = -1/2$. Infine, per determinare il punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di massimo relativo, ottenendo

$$f(0) = 0 > \frac{3}{4} - \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = f(\pi/3)\,,$$

da cui si ricava che il punto di massimo assoluto è $x = 0$ e il valore massimo della funzione è $f(0) = 0$.

Esercizio 5

i) Per quanto riguarda le relazioni tra continuità e derivabilità, gli esempi e controesempi, nonché l'enunciato e la dimostrazione del teorema principale, si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione a) è falsa, poiché essa richiede l'esistenza della derivata anche in un intorno dell'origine e la sua continuità in $x = 0$ (almeno lungo la funzione $x \mapsto \sin x$), che non sono assicurate dalle ipotesi fatte. Ad esempio, basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0} f'(\sin x) = \lim_{x\to 0} \left[2(\sin x) \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sin x}\right) \right] = - \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \nexists\,.$$

L'affermazione b) è vera, poiché $\lim\limits_{x\to 0} \log(1 + x) = 0$ e, per definizione di continuità (utilizzata nella seconda uguaglianza del calcolo seguente), si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f(\log(1 + x)) = f\left(\lim_{x\to 0} \log(1 + x)\right) = f(0)\,.$$

L'affermazione c) è falsa; infatti, basta considerare la funzione discontinua nell'origine definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0; \\ 1 & \text{se } x < 0; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad a_n = 1/n \to 0\,.$$

In tal caso, poiché $1/n > 0$ e $f(1/n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(1/n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 = f(0)\,.$$