SOLUZIONI COMPITO dello 07/09/2009
ANALISI 1 - ELETTRICA 5 CFU

Esercizio 1
Ponendo $a_n := \frac{3n+e^n}{3^{2n}+\log n}$ e ricordando gli ordini di infinito, si ricava che $a_n \sim \frac{e^n}{3^{2n}}$. Utilizzando ora il criterio della radice, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{9^n}} = \frac{e}{9} < 1\,.$$

La serie, pertanto, risulta essere convergente.

Esercizio 2
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 1 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 1$; quindi la soluzione dell'omogenea associata sarà data da $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Dal metodo di somiglianza si ottiene, invece, che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Axe^x$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa, si ottiene

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1/2\,,$$

quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$.

Esercizio 3
Effettuando il cambiamento di variabile $t = x^{-3/2}$, da cui $-(3/2)x^{-5/2}\,dx = dt$, $\pi^{-2/3} \to \pi$ e $(\pi/2)^{-2/3} \to \pi/2$, e poi integrando per parti si ottiene

$$\int_{\pi^{-2/3}}^{(\pi/2)^{-2/3}} \frac{\sin\sqrt{x^{-3}}}{x^4}\,dx = -\frac{2}{3}\int_{\pi}^{\pi/2} t\sin t\;dt = \frac{2}{3}\left[-t\cos t\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos t\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[-t\cos t + \sin t\right]\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{3}\left[\pi - 1\right]\,.$$

Esercizio 4
Calcolando la derivata prima e seconda di f si ottiene

$$f'(x) = 1 + \cos x \qquad\qquad f''(x) = -\sin x\,.$$

Pertanto,

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]\,,$$
$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in [-\pi/2, 0)\,; \qquad f''(0) = 0\,; \qquad f''(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \pi/2]\,.$$

Quindi f è sempre crescente, ha un punto di minimo assoluto in $x = -\pi/2$ e un punto di massimo assoluto in $x = \pi/2$; ha un flesso in $x = 0$, è convessa in $[-\pi/2, 0)$ e concava in $(0, \pi/2]$.