SOLUZIONI COMPITO dello 07/09/2010
ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Posto $z = a + ib$, l'equazione può essere riscritta nella forma

$$(a+ib)\sqrt{a^2+b^2} - 2a - 2ib + i = a(\sqrt{a^2+b^2} - 2) + i(1 - 2b + b\sqrt{a^2+b^2}) = 0\,.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a(\sqrt{a^2+b^2} - 2) = 0; \\ 1 - 2b + b\sqrt{a^2+b^2} = 0; \end{cases} \implies \begin{array}{l} \begin{cases} a = 0; \\ 1 - 2b + b|b| = 0; \end{cases} \\ \text{oppure} \\ \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = 2; \\ 1 - 2b + 2b = 0; \end{cases} \quad \text{che è impossibile;} \end{array}$$

$$\implies \begin{cases} a = 0; \\ b \geq 0; \\ 1 - 2b + b^2 = 0; \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a = 0; \\ b < 0; \\ 1 - 2b - b^2 = 0; \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = 0; \\ b = 1; \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a = 0; \\ b = -1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono $z = i$ e $z = -(1+\sqrt{2})i$.

Esercizio 2
Osserviamo che la serie proposta è una serie a termini non negativi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = \sin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$, e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/\sqrt[4]{n}$, si ottiene

$$a_n := \frac{1 - \cos\left(\sin \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)}{\sqrt{n}} \sim \frac{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 = \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2n}\,.$$

Pertanto, per confronto asintotico con la serie armonica, si ricava che la serie proposta diverge.

Esercizio 3
La funzione proposta sarà ben definita se e solo se verrà soddisfatta la condizione $e^{(x+1)} - 1 > 0$, cioè $x > -1$. Quindi, il campo di esistenza sarà dato dall'intervallo $(-1, +\infty)$. Calcolando i limiti alla frontiera, si ottiene

$$\lim_{x\to -1^+} \log(e^{(x+1)} - 1) = -\infty \qquad \implies \qquad x = -1 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log(e^{(x+1)} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \log(e^{(x+1)}) = \lim_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \qquad \implies \qquad \text{non c'è asintoto orizzontale.}$$

Controlliamo, quindi, se la funzione ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\mathrm{e}^{(x+1)}-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\mathrm{e}^{(x+1)})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)}{x} = 1\,;\\
q &= \lim_{x\to+\infty} (\log(\mathrm{e}^{(x+1)}-1) - x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\log(\mathrm{e}^{(x+1)}-1) - \log(\mathrm{e}^{x})\big)\\
&= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\mathrm{e}^{(x+1)}-1}{\mathrm{e}^{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\mathrm{e}^{(x+1)}}{\mathrm{e}^{x}}\right) = \log \mathrm{e} = 1\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, la retta $y = x+1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Esercizio 4

Poiché f è una funzione positiva e continua su tutto l'intervallo $[0,+\infty)$, per stabilire se essa è impropriamente integrabile in tale intervallo è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Otteniamo così:

$$
x \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \sim \frac{x^{3/2}}{x^{2/\alpha}} = \frac{1}{x^{2/\alpha - 3/2}}\,.
$$

Pertanto, f sarà integrabile se e solo se $2/\alpha - 3/2 > 1$, ovvero $2/\alpha - 5/2 > 0$, cioè $\frac{4-5\alpha}{2\alpha} > 0$. La soluzione di quest'ultima disequazione fornisce $0 < \alpha < 4/5$.

Esercizio 5

Affinché $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-1-2x-3x^2}{x^2} = 0$, si deve necessariamente avere $f(0) = 1$ (altrimenti il limite sarebbe infinito). Tenuto conto di questa osservazione, è possibile applicare il teorema di de L'Hospital, ricavando $\lim_{x\to0^\pm} \frac{f'(x)-2-6x}{2x} = 0$. Come prima, si deve necessariamente avere $f'(0) = 2$ (altrimenti il limite sarebbe infinito). Riapplicando ancora una volta il teorema di de L'Hospital, si ottiene $\lim_{x\to0} \frac{f''(x)-6}{2} = 0$, che fornisce $f''(0) = 6$.

Esercizio 6

Determiniamo innanzitutto i punti critici della funzione proposta, imponendo l'annullamento del gradiente:

$$
\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy + 2x = 0; \\ f_y(x,y) = x^2 - 2 = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = -1; \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}
$$

Pertanto, gli unici punti critici sono $P_1 = (\sqrt{2},-1)$ e $P_2 = (-\sqrt{2},-1)$. Calcolando il determinante della matrice Hessiana in tali punti si ottiene:

$$
det\big(H_f(x,y)\big) = \begin{vmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -4x^2 < 0 \quad \forall x \neq 0\,.
$$

Quindi si ricava subito che $det\big(H_f(P_1)\big) = det\big(H_f(P_2)\big) = -8 < 0$ e ciò implica che entrambi i punti P_1 e P_2 sono punti di sella.

TEMA B

Esercizio 1

Posto $z = a + ib$, l'equazione può essere riscritta nella forma

$$(a+ib)\sqrt{a^2+b^2} + 2a + 2ib - i = a(\sqrt{a^2+b^2}+2) + i(b\sqrt{a^2+b^2} + 2b - 1) = 0\,.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a(\sqrt{a^2+b^2}+2) = 0; \\ b\sqrt{a^2+b^2} + 2b - 1 = 0; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \begin{cases} a = 0; \\ b|b| + 2b - 1 = 0; \end{cases} \\ \text{oppure} \\ \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + 2 = 0; \\ b\sqrt{a^2+b^2} + 2b - 1 = 0; \end{cases} \quad \text{che è impossibile;} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \begin{cases} a = 0; \\ b \geq 0; \\ b^2 + 2b - 1 = 0; \end{cases} \\ \text{oppure} \\ \begin{cases} a = 0; \\ b < 0; \\ -b^2 + 2b - 1 = 0; \end{cases} \quad \text{che è impossibile;} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 0; \\ b = -1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Quindi l'unica soluzione è $z = (-1 + \sqrt{2})i$.

Esercizio 2

Osserviamo che la serie proposta è una serie a termini non negativi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \sin^3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/\sqrt[3]{n}$, si ottiene

$$a_n := \frac{\exp\left(\sin^3 \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) - 1}{\sqrt[3]{n}} \sim \frac{\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\sqrt[3]{n}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{4/3}}\,.$$

Pertanto, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $4/3 > 1$, si ricava che la serie proposta converge.

Esercizio 3

La funzione proposta sarà ben definita se e solo se verrà soddisfatta la condizione $\mathrm{e}^{(2x-2)} - 1 > 0$, cioè $x > 1$. Quindi, il campo di esistenza sarà dato dall'intervallo $(1, +\infty)$. Calcolando i limiti alla frontiera, si ottiene

$$\lim_{x\to 1^+} \log(\mathrm{e}^{(2x-2)} - 1) = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log(\mathrm{e}^{(2x-2)} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \log(\mathrm{e}^{(2x-2)}) = \lim_{x\to+\infty} (2x-2) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \text{non c'è asintoto orizzontale.}$$

Controlliamo, quindi, se la funzione ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\mathrm{e}^{(2x-2)} - 1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\mathrm{e}^{(2x-2)})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-2)}{x} = 2\,;$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to+\infty} (\log(\mathrm{e}^{(2x-2)} - 1) - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\log(\mathrm{e}^{(2x-2)} - 1) - \log(\mathrm{e}^{2x})\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\mathrm{e}^{(2x-2)} - 1}{\mathrm{e}^{2x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\mathrm{e}^{(2x-2)}}{\mathrm{e}^{2x}}\right) = \log(\mathrm{e}^{-2}) = -2\,. \end{aligned}$$

Pertanto, la retta $y = 2x - 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Esercizio 4

Poiché f è una funzione positiva e continua su tutto l'intervallo $[0, +\infty)$, per stabilire se essa è impropriamente integrabile in tale intervallo è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Otteniamo così:

$$x \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \sim \frac{x^{9/\alpha}}{x^{4/3}} = \frac{1}{x^{4/3-9/\alpha}}\,.$$

Pertanto, f sarà integrabile se e solo se $4/3 - 9/\alpha > 1$, ovvero $1/3 - 9/\alpha > 0$, cioè $\frac{\alpha-27}{3\alpha} > 0$. La soluzione di quest'ultima disequazione fornisce $\alpha < 0$ e $\alpha > 27$.

Esercizio 5

Affinché $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-2+3x+2x^2}{3x^2} = 0$, si deve necessariamente avere $f(0) = 2$ (altrimenti il limite sarebbe infinito). Tenuto conto di questa osservazione, è possibile applicare il teorema di de L'Hospital, ricavando $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f'(x)+3+4x}{6x} = 0$. Come prima, si deve necessariamente avere $f'(0) = -3$ (altrimenti il limite sarebbe infinito). Riapplicando ancora una volta il teorema di de L'Hospital, si ottiene $\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)+4}{6} = 0$, che fornisce $f''(0) = -4$.

Esercizio 6

Determiniamo innanzitutto i punti critici della funzione proposta, imponendo l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy + 2x = 0; \\ f_y(x,y) = x^2 - 2 = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = -1; \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Pertanto, gli unici punti critici sono $P_1 = (\sqrt{2}, -1)$ e $P_2 = (-\sqrt{2}, -1)$. Calcolando il determinante della matrice Hessiana in tali punti si ottiene:

$$det\big(H_f(x,y)\big) = \begin{vmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -4x^2 < 0 \quad \forall x \neq 0\,.$$

Quindi si ricava subito che $det\big(H_f(P_1)\big) = det\big(H_f(P_2)\big) = -8 < 0$ e ciò implica che entrambi i punti P_1 e P_2 sono punti di sella.