SOLUZIONI COMPITO dello 07/09/2017
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $e^{5a}e^{i5b} = e^{-5}$, da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} e^{5a} = e^{-5}\,, \\ 5b = 0 + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1\,, \\ b = 2k\pi/5\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Pertanto, l'equazione proposta ha infinite soluzioni della forma $z = -1 + \frac{2}{5}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Per determinare il campo d'esistenza della funzione proposta, l'unica condizione da imporre è che il denominatore non si annulli, cioè $e^{2x} - 1 \neq 0$, che fornisce $x \neq 0$. Pertanto, $E = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{2}{2x} = \pm\infty\,, \quad \implies \quad x = 0 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^2}{-1} = +\infty\,, \quad \implies \quad \text{non c'è asintoto orizzontale né obliquo,}$$

$$\text{poiché la funzione diverge all'infinito come } x^2;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^x}{e^{2x}} = 0^+\,, \quad \implies \quad y = 0 \text{ è asintoto orizzontale.}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$; pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_o(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$, da cui $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$ e $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Inserendo nell'equazione completa, si ottiene $-A\cos x - B\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = \cos x$, da cui

$$\begin{cases} -A - 4B + 5A = 1\,, \\ -B + 4A + 5B = 0\,, \end{cases} \implies \begin{cases} A = -B\,, \\ B - 4B - 5B = 1\,, \end{cases}$$

che fornisce $y_p(x) = \frac{1}{8}(\cos x - \sin x)$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{8}(\cos x - \sin x)$, che è periodica se e solo se $C_1 = C_2 = 0$. Pertanto, esiste un'unica soluzione periodica dell'equazione proposta, data da $y(x) = \frac{1}{8}(\cos x - \sin x)$.

Esercizio 4

Ponendo $a_n(x) := \frac{n^{-2x}}{2+n^x}$, si ricava che, per $x = 0$, $a_n(0) = 1/3$, quindi la serie diverge a $+\infty$ poiché il termine generale è positivo, ma non infinitesimo. Analogamente, per $x < 0$, si ricava $a_n(x) \sim \frac{n^{-2x}}{2} \to +\infty$, quindi la serie diverge a $+\infty$ poiché il termine generale è positivo, ma non infinitesimo. Infine, per $x > 0$, si ha $a_n(x) \sim \frac{n^{-2x}}{n^x} = \frac{1}{n^{3x}}$ che, per confronto con la serie armonica generalizzata, fornisce una serie convergente se e solo se $3x > 1$, ovvero $x > 1/3$.

Ricapitolando, la serie proposta converge per $x > 1/3$ e diverge a $+\infty$, per $x \leq 1/3$.

Esercizio 5

i) Per le definizioni richieste si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione A) è corretta poiché, dall'algebra dei limiti, abbiamo il prodotto di due successioni infinitesime, che produce una successione infinitesima, cioè convergente.
L'affermazione B) è falsa, basta considerare le due successioni infinitesime $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$, da cui $\frac{a_n}{b_n} = n \to +\infty$.

L'affermazione $C)$ è falsa, basta considerare le due successioni infinitesime $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, da cui $\frac{b_n}{a_n} = n \to +\infty$.
L'affermazione $D)$ è corretta poiché, dall'algebra dei limiti nella retta reale estesa, abbiamo che il prodotto di due successioni infinitesime è una successione infinitesima, che elevata all'infinito è ancora infinitesima e, quindi, il reciproco di una successione infinitesima e positiva diverge a $+\infty$.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $\mathrm{e}^{-3a}\mathrm{e}^{-i3b} = \mathrm{e}^3$, da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-3a} = \mathrm{e}^3\,, \\ -3b = 0 + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = -1\,, \\ b = 2k\pi/3\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Pertanto, l'equazione proposta ha infinite soluzioni della forma $z = -1 + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Per determinare il campo d'esistenza della funzione proposta, l'unica condizione da imporre è che il denominatore non si annulli, cioè $1 - \mathrm{e}^{3x} \neq 0$, che fornisce $x \neq 0$. Pertanto, $E = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{3}{-3x} = \mp\infty\,, \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^4}{1} = -\infty\,, \quad \Longrightarrow \quad \text{non c'è asintoto orizzontale né obliquo,}$$

$$\text{poiché la funzione diverge all'infinito come } -x^4;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3\mathrm{e}^x}{-\mathrm{e}^{3x}} = 0^-\,, \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \text{ è asintoto orizzontale.}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$; pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_o(x) = \mathrm{e}^x(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))$. Dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$, da cui $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$ e $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Inserendo nell'equazione completa, si ottiene $-A\cos x - B\sin x + 2A\sin x - 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = \sin x$, da cui

$$\begin{cases} -A - 2B + 5A = 0\,, \\ -B + 2A + 5B = 1\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} B = 2A\,, \\ -2A + 2A + 10A = 1\,, \end{cases}$$

che fornisce $y_p(x) = \frac{1}{10}(\cos x + 2\sin x)$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = \mathrm{e}^x(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) + \frac{1}{10}(\cos x + 2\sin x)$, che è periodica se e solo se $C_1 = C_2 = 0$. Pertanto, esiste un'unica soluzione periodica dell'equazione proposta, data da $y(x) = \frac{1}{10}(\cos x + 2\sin x)$.

Esercizio 4

Ponendo $a_n(x) := \frac{3+n^{-x}}{n^{3x}}$, si ricava che, per $x = 0$, $a_n(0) = 4$, quindi la serie diverge a $+\infty$ poiché il termine generale è positivo, ma non infinitesimo. Analogamente, per $x < 0$, si ricava $a_n(x) \sim \frac{n^{-x}}{n^{3x}} = n^{-4x} \to +\infty$, quindi la serie diverge a $+\infty$ poiché il termine generale è positivo, ma non infinitesimo. Infine, per $x > 0$, si ha $a_n(x) \sim \frac{3}{n^{3x}}$ che, per confronto con la serie armonica generalizzata, fornisce una serie convergente se e solo se $3x > 1$, ovvero $x > 1/3$.

Ricapitolando, la serie proposta converge per $x > 1/3$ e diverge a $+\infty$, per $x \leq 1/3$.

Esercizio 5

i) Per le definizioni richieste si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione $A)$ è corretta poiché, dall'algebra dei limiti, abbiamo il prodotto di due successioni infinitesime, che produce una successione infinitesima, cioè convergente.
L'affermazione $B)$ è falsa, basta considerare le due successioni infinitesime $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$, da cui $\frac{a_n}{b_n} = n \to +\infty$.
L'affermazione $C)$ è falsa, basta considerare le due successioni infinitesime $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, da cui $\frac{b_n}{a_n} = n \to +\infty$.
L'affermazione $D)$ è corretta poiché, dall'algebra dei limiti nella retta reale estesa, abbiamo che il prodotto di due successioni infinitesime è una successione infinitesima, che elevata all'infinito è ancora infinitesima e, quindi, il reciproco di una successione infinitesima e positiva diverge a $+\infty$.