SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Ponendo $w = z - i$, otteniamo l'equazione $w^4 = -16i = 16\mathrm{e}^{-i\pi/2}$, che ha come soluzioni le 4 radici quarte di $16\mathrm{e}^{-i\pi/2}$. Esse sono date da

$$\begin{aligned} w_1 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{-\pi/2}{4}} = 2\mathrm{e}^{-i\pi/8}\,, & w_2 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{-\pi/2+2\pi}{4}} = 2\mathrm{e}^{3i\pi/8}\,, \\ w_3 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{-\pi/2+4\pi}{4}} = 2\mathrm{e}^{7i\pi/8}\,, & w_4 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{-\pi/2+6\pi}{4}} = 2\mathrm{e}^{11i\pi/8}\,. \end{aligned}$$

Da ciò ricaviamo

$$\begin{aligned} z_1 &= i + 2[\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)]\,, & z_2 &= i + 2[\cos(3\pi/8) + i\sin(3\pi/8)]\,, \\ z_3 &= i + 2[\cos(7\pi/8) + i\sin(7\pi/8)]\,, & z_4 &= i + 2[\cos(11\pi/8) + i\sin(11\pi/8)]\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene:

$$a_n := \frac{[\log(n^n)]^{2\alpha}}{(n+1)^{\alpha^2+\alpha-1}} \sim \frac{n^{2\alpha}(\log n)^{2\alpha}}{n^{\alpha^2+\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha^2-\alpha-1}(\log n)^{-2\alpha}}\,.$$

Quindi, tenendo conto degli ordini di infinito, il termine generale è infinitesimo se $\alpha^2 - \alpha - 1 > 0$, ovvero per $\alpha < (1-\sqrt{5})/2$ e $\alpha > (1+\sqrt{5})/2$, oppure per $\alpha = (1-\sqrt{5})/2$, in quanto in quest'ultimo caso si ottiene

$$a_n \sim \frac{1}{(\log n)^{(\sqrt{5}-1)}} \to 0\,.$$

Inoltre, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge per $\alpha^2 - \alpha - 1 > 1$, ovvero per $\alpha < -1$ e $\alpha > 2$, oppure per $\alpha = -1$, in quanto in quest'ultimo caso si ottiene

$$a_n \sim \frac{1}{n(\log n)^2}\,.$$

Per tutti gli altri valori di α la serie diverge.

Esercizio 3

La funzione proposta è ovviamente definita e continua continua in $(-1/4, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, in quanto dobbiamo imporre le condizioni:

$$1 + 4x > 0\,, \qquad \mathrm{e}^{4x} - 1 \neq 0\,, \qquad x \neq 0\,, \qquad x^2 - 1 \neq 0\,.$$

I limiti alla frontiera sono dati da

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-1/4^+} f(x) &= \lim_{x\to-1/4^+} \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\log(1+4x)}{x(\mathrm{e}^{4x}-1)(x^2-1)} = \frac{4(1-\mathrm{e}^{-1/2})}{(1-\mathrm{e}^{-1})(1-1/(16))} \lim_{x\to-1/4^+} \log(1+4x) = -\infty\,; \\ \lim_{x\to0^\pm} f(x) &= \lim_{x\to0^\pm} \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\log(1+4x)}{x(\mathrm{e}^{4x}-1)(x^2-1)} = \lim_{x\to0^\pm} -\frac{2x\,4x}{x\,4x} = -2\,; \\ \lim_{x\to1^\pm} f(x) &= \lim_{x\to1^\pm} \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\log(1+4x)}{x(\mathrm{e}^{4x}-1)(x^2-1)} = \frac{(\mathrm{e}^2-1)\log 5}{2(\mathrm{e}^4-1)} \lim_{x\to1^\pm} \frac{1}{x-1} = \pm\infty\,; \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\log(1+4x)}{x(\mathrm{e}^{4x}-1)(x^2-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}\log(4x)}{x^3\,\mathrm{e}^{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^3\,\mathrm{e}^{2x}} = 0\,; \end{aligned}$$

dove, per il calcolo del secondo limite, si è usato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 2x$ e $t = 4x$, rispettivamente, e per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 4x$. Pertanto abbiamo che $x = -1/4$ è asintoto verticale per $x \to -1/4^+$; $x = 1$ è asintoto verticale per $x \to 1^\pm$ e $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Infine la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la *c*), poiché la derivabilità implica la continuità.
Scegliendo, ad esempio, $f(x) = (x-1)^3$ si contraddice la risposta *a*), in quanto $f'(1) = 0$, ma $x = 1$ è un punto di flesso a tangente orizzontale e non un estremante.
Scegliendo, ad esempio, $f(x) = |x-1|$ si contraddicono le risposte *b*) e *d*), in quanto f è continua in $x = 1$, $f(1) = 0$, ma f non è derivabile in $x = 1$, dove presenta un punto angoloso.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Ponendo $w = z + 1$, otteniamo l'equazione $w^6 = 8 = 8\mathrm{e}^{i0}$, che ha come soluzioni le 6 radici seste di $8\mathrm{e}^{i0}$. Esse sono date da

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{0}{6}} = \sqrt{2}\,, & w_2 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{0+2\pi}{6}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/3}\,, \\ w_3 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{0+4\pi}{6}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{2i\pi/3}\,, & w_4 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{0+6\pi}{6}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi}\,, \\ w_5 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{0+8\pi}{6}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{4i\pi/3}\,, & w_6 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{0+10\pi}{6}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{5i\pi/3}\,. \end{aligned}$$

Da ciò ricaviamo

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 + \sqrt{2}[\cos(0) + i\sin(0)] = \sqrt{2} - 1\,, & z_2 &= -1 + \sqrt{2}[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)]\,, \\ z_3 &= -1 + \sqrt{2}[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)]\,, & z_4 &= -1 + \sqrt{2}[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -1 - \sqrt{2}\,, \\ z_5 &= -1 + \sqrt{2}[\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)]\,, & z_6 &= -1 + \sqrt{2}[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)]\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene:

$$a_n := \frac{(n^2+4)^{\alpha+3}}{[\log(n^4)]^{\alpha^2-2}} \sim \frac{n^{2\alpha+6}}{(4\log n)^{\alpha^2-2}} = \frac{1}{n^{-2\alpha-6}(4\log n)^{\alpha^2-2}}\,.$$

Quindi, tenendo conto degli ordini di infinito, il termine generale è infinitesimo se $-2\alpha - 6 > 0$, ovvero per $\alpha < -3$, oppure per $\alpha = -3$, in quanto in quest'ultimo caso si ottiene

$$a_n \sim \frac{1}{(4\log n)^7} \to 0\,.$$

Inoltre, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge per $-2\alpha - 6 > 1$, ovvero per $\alpha < -7/2$ oppure per $\alpha = -7/2$, in quanto in quest'ultimo caso si ottiene

$$a_n \sim \frac{1}{n(4\log n)^{41/4}}\,.$$

Per tutti gli altri valori di α la serie diverge.

Esercizio 3

La funzione proposta è ovviamente definita e continua continua in $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1/4)$, in quanto dobbiamo imporre le condizioni:

$$1 - 4x > 0\,, \qquad \mathrm{e}^{-1-x} - 1 \neq 0\,, \qquad \log(1-4x) \neq 0\,.$$

I limiti alla frontiera sono dati da

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{(\mathrm{e}^{-1-x}-1)\log(1-4x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^{-1-x}\log(-4x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^{-1-x}\log(-x)} = 0\,;$$

$$\lim_{x\to-1^\pm} f(x) = \lim_{x\to-1^\pm} \frac{\sin x}{(\mathrm{e}^{-1-x}-1)\log(1-4x)} = \frac{\sin(-1)}{\log 5} \lim_{x\to-1^\pm} \frac{1}{\mathrm{e}^{-1-x}-1} = \pm\infty\,;$$

$$\lim_{x\to0^\pm} f(x) = \lim_{x\to0^\pm} \frac{\sin x}{(\mathrm{e}^{-1-x}-1)\log(1-4x)} = \lim_{x\to0^\pm} -\frac{x}{4x(\mathrm{e}^{-1}-1)} = \frac{1}{4(1-\mathrm{e}^{-1})}\,;$$

$$\lim_{x\to1/4^-} f(x) = \lim_{x\to1/4^-} \frac{\sin x}{(\mathrm{e}^{-1-x}-1)\log(1-4x)} = \frac{\sin(1/4)}{(\mathrm{e}^{-5/4}-1)} \lim_{x\to1/4^-} \frac{1}{\log(1-4x)} = 0\,;$$

dove, per il calcolo del terzo limite, si è usato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = x$, e per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = -4x$. Pertanto abbiamo che $x = 1$ è asintoto verticale per $x \to 1^\pm$ e $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Infine la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$ ed in $x = 1/4$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la b), poiché dalla definizione di continuità si ottiene che $\lim_{x\to3} f(x) = f(3) = 5$. Scegliendo, ad esempio, $f(x) = -|x-3|$ si contraddicono le risposte a) e d), in quanto f è continua in $x = 3$, ma ha un punto angoloso in $x = 3$, dove quindi non è derivabile ed inoltre $x = 3$ è punto di massimo assoluto. Scegliendo, ad esempio, $f(x) = 1$ per $x > 0$ e $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ (cioè la funzione impulso) si contraddice la risposta c), in quanto f è continua in $x = 3$, ma ha un salto in $x = 0$.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

Ponendo $w = z - 1$, otteniamo l'equazione $w^6 = -8 = 8e^{i\pi}$, che ha come soluzioni le 6 radici seste di $8e^{i\pi}$. Esse sono date da

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\,, & w_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi+2\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{i\pi/2} = \sqrt{2}i\,,\\
w_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi+4\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{5i\pi/6}\,, & w_4 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi+6\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{7i\pi/6}\,,\\
w_5 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi+8\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{3i\pi/2} = -\sqrt{2}i\,, & w_6 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi+10\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{11i\pi/6}\,.
\end{aligned}$$

Da ciò ricaviamo

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1+\sqrt{2}[\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)]\,, & z_2 &= 1+\sqrt{2}[\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)] = 1+i\sqrt{2}\,,\\
z_3 &= 1+\sqrt{2}[\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6)]\,, & z_4 &= 1+\sqrt{2}[\cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6)]\,,\\
z_5 &= 1+\sqrt{2}[\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)] = 1-i\sqrt{2}\,, & z_6 &= 1+\sqrt{2}[\cos(11\pi/6)+i\sin(11\pi/6)]\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene:

$$a_n := (n^2+5)^{2-\alpha^2}[\log(n^2)]^{\alpha-1} \sim n^{4-2\alpha^2}(2\log n)^{\alpha-1} = \frac{1}{n^{2\alpha^2-4}(2\log n)^{1-\alpha}}\,.$$

Quindi, tenendo conto degli ordini di infinito, il termine generale è infinitesimo se $2\alpha^2 - 4 > 0$, ovvero per $\alpha < -\sqrt{2}$ e per $\alpha > \sqrt{2}$, oppure per $\alpha = -\sqrt{2}$, in quanto in quest'ultimo caso si ottiene

$$a_n \sim \frac{1}{(2\log n)^{1+\sqrt{2}}} \to 0\,.$$

Inoltre, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge per $2\alpha^2 - 4 > 1$, ovvero per $\alpha < -\sqrt{5/2}$ e per $\alpha > \sqrt{5/2}$, oppure per $\alpha = -\sqrt{5/2}$, in quanto in quest'ultimo caso si ottiene

$$a_n \sim \frac{1}{n(2\log n)^{1+\sqrt{5/2}}}\,.$$

Per tutti gli altri valori di α la serie diverge.

Esercizio 3

La funzione proposta è ovviamente definita e continua continua in $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,1/3)$, in quanto dobbiamo imporre le condizioni:

$$1-3x>0\,,\qquad e^{-x-2}-1\neq 0\,,\qquad x\neq 0\,.$$

I limiti alla frontiera sono dati da

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x\log(1-3x)}{x^2(e^{-x-2}-1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x\log(-3x)}{x^2e^{-x-2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x\log(-x)}{x^2e^{-x-2}} = 0\,;\\
\lim_{x\to-2^\pm} f(x) &= \lim_{x\to-2^\pm}\frac{\sin x\log(1-3x)}{x^2(e^{-x-2}-1)} = \frac{\sin(-2)\log 7}{4}\lim_{x\to-2^\pm}\frac{1}{e^{-x-2}-1} = \pm\infty\,;\\
\lim_{x\to0^\pm} f(x) &= \lim_{x\to0^\pm}\frac{\sin x\log(1-3x)}{x^2(e^{-x-2}-1)} = \lim_{x\to0^\pm} -\frac{x\cdot 3x}{x^2(e^{-2}-1)} = \frac{3}{1-e^{-2}}\,;\\
\lim_{x\to1/3^-} f(x) &= \lim_{x\to1/3^-}\frac{\sin x\log(1-3x)}{x^2(e^{-x-2}-1)} = \frac{9\sin(1/3)}{(e^{-7/3}-1)}\lim_{x\to1/3^-}\log(1-3x) = +\infty\,;
\end{aligned}$$

dove, per il calcolo del terzo limite, si è usato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t\mapsto\sin t$, con $t=x$, e per la funzione $t\mapsto\log(1+t)$, con $t=-3x$. Pertanto abbiamo che $x=1/3$ è asintoto verticale per $x\to1/3^-$; $x=2$ è asintoto verticale per $x\to2^\pm$ e $y=0$ è asintoto orizzontale per $x\to-\infty$. Infine la funzione è prolungabile con continuità in $x=0$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la d), poiché, se f è derivabile, dalla definizione si ottiene che $f'(-1)$, che è il limite del rapporto incrementale, deve esistere ed essere finito.
Scegliendo, ad esempio, $f(x) = x + 1$ si contraddicono le risposte a) e b), in quanto f è continua e derivabile ed $f(-1) = 0$, ma f non ha nessun punto di minimo in $\mathbb{R}$.
Scegliendo, ad esempio, $f(x) = |x + 1|$ si contraddice la risposta c), in quanto f è continua ed ha un punto di minimo assoluto in $x = -1$, ma non è derivabile in tale punto.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

Ponendo $w = z + i$, otteniamo l'equazione $w^4 = 4i = 4e^{i\pi/2}$, che ha come soluzioni le 4 radici quarte di $4e^{i\pi/2}$. Esse sono date da

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi/2}{4}} = \sqrt{2}e^{i\pi/8}\,, & w_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi/2+2\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{5i\pi/8}\,, \\ w_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi/2+4\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{9i\pi/8}\,, & w_4 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi/2+6\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{13i\pi/8}\,. \end{aligned}$$

Da ciò ricaviamo

$$\begin{aligned} z_1 &= -i + \sqrt{2}[\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)]\,, & z_2 &= -i + \sqrt{2}[\cos(5\pi/8) + i\sin(5\pi/8)]\,, \\ z_3 &= -i + \sqrt{2}[\cos(9\pi/8) + i\sin(9\pi/8)]\,, & z_4 &= -i + \sqrt{2}[\cos(13\pi/8) + i\sin(13\pi/8)]\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene:

$$a_n := \frac{(n+2)^\alpha}{[\log(n^{2n})]^{\alpha^2-1}} \sim \frac{n^\alpha}{n^{\alpha^2-1}(2\log n)^{\alpha^2-1}} = \frac{1}{n^{\alpha^2-\alpha-1}(2\log n)^{\alpha^2-1}}\,.$$

Quindi, tenendo conto degli ordini di infinito, il termine generale è infinitesimo se $\alpha^2 - \alpha - 1 > 0$, ovvero per $\alpha < (1-\sqrt{5})/2$ e $\alpha > (1+\sqrt{5})/2$, oppure per $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$, in quanto in quest'ultimo caso si ottiene

$$a_n \sim \frac{1}{(2\log n)^{(1+\sqrt{5})/2}} \to 0\,.$$

Inoltre, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge per $\alpha^2 - \alpha - 1 > 1$, ovvero per $\alpha < -1$ e $\alpha > 2$, oppure per $\alpha = 2$, in quanto in quest'ultimo caso si ottiene

$$a_n \sim \frac{1}{n(2\log n)^3}\,.$$

Per tutti gli altri valori di α la serie diverge.

Esercizio 3

La funzione proposta è ovviamente definita e continua continua in $(-1/2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$, in quanto dobbiamo imporre le condizioni:

$$1 + 2x > 0\,, \qquad 1 - e^{3x} \neq 0\,, \qquad x \neq 0\,, \qquad 4 - x^2 \neq 0\,.$$

I limiti alla frontiera sono dati da

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1/2^+} f(x) &= \lim_{x\to -1/2^+} \frac{(1-e^x)\log(1+2x)}{3x(1-e^{3x})(4-x^2)} = -\frac{2(1-e^{-1/2})}{3(1-e^{-3/2})(4-1/4)} \lim_{x\to -1/2^+} \log(1+2x) = +\infty\,; \\ \lim_{x\to 0^\pm} f(x) &= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{(1-e^x)\log(1+2x)}{3x(1-e^{3x})(4-x^2)} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{(-x)\,2x}{3x\,(-3x)\,4} = \frac{1}{18}\,; \\ \lim_{x\to 2^\pm} f(x) &= \lim_{x\to 2^\pm} \frac{(1-e^x)\log(1+2x)}{3x(1-e^{3x})(4-x^2)} = \frac{(1-e^2)\log 5}{24(1-e^6)} \lim_{x\to 2^\pm} \frac{1}{2-x} = \mp\infty\,; \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{(1-e^x)\log(1+2x)}{3x(1-e^{3x})(4-x^2)} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{e^x\log(2x)}{3x^3\,e^{3x}} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{\log x}{3x^3\,e^{2x}} = 0\,; \end{aligned}$$

dove, per il calcolo del secondo limite, si è usato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto e^t$, con $t = x$ e $t = 3x$, rispettivamente, e per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 2x$. Pertanto abbiamo che $x = -1/2$ è asintoto verticale per $x \to -1/2^+$; $x = 2$ è asintoto verticale per $x \to 2^\pm$ e $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Infine la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la a), poiché la derivabilità implica la continuità.

Scegliendo, ad esempio, $f(x) = 1 + (x-2)^4$ si contraddicono tutte le altre risposte. Infatti, in tal caso, $f'(2) = 0$, $f(2) = 1$ e $f(x) \geq 1$, quindi f ha un punto di minimo in $x = 2$ (e, pertanto, non può avere né un punto di flesso a tangente orizzontale, né un punto di massimo in $x = 2$); inoltre, $f(2) \neq 0$.