**SOLUZIONI COMPITO dello 08/01/2010**
**ANALISI 1 - ELETTRICA 5 CFU**

**Esercizio 1**
Ponendo $w = \overline{z} - 4$, l'equazione proposta si riconduce a $w^2 = -1$, da cui $w = \pm i$. Quindi, riscrivendo $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$(a-4) - ib = \pm i \qquad \Longrightarrow \qquad a - 4 = 0,\ -b = \pm 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = 4 \pm i\,.$$

**Esercizio 2**
L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni reali e distinte $\lambda = -2, 1$. Pertanto l'integrale generale sarà $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0\,, \\ -2C_1 + C_2 = 3\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_1 = -C_2\,, \\ 3C_2 = 3\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_2 = 1\,, \\ C_1 = -1\,. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione sarà data dalla funzione $y(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-2x}$.

**Esercizio 3**
Effettuando il cambiamento di variabile $t = \mathrm{e}^{2x}$, da cui $2\mathrm{e}^{2x}\,dx = dt$, $t(0) = 1$ e $t\left(\frac{\log 2}{2}\right) = 2$, e decomponendo la razionale fratta propria così ottenuta, si ricava

$$\int_0^{\frac{\log 2}{2}} \frac{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}{(2+\mathrm{e}^{2x})^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1+t}{(2+t)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_1^2 \frac{1}{2+t}\,dt - \int_1^2 \frac{1}{(2+t)^2}\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log(2+t) + \frac{1}{2+t}\right]\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{12}\right]\,.$$

**Esercizio 4**
Il campo di esistenza della funzione proposta è determinato dalla condizione $2x + 1 \neq 0$, ovvero $D = (-\infty, -1/2) \cup (-1/2, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x \to (-1/2)^{\pm}} f(x) = \pm\infty \qquad \Longrightarrow \qquad x = -1/2 \quad \text{è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x} = \pm\infty\,, \qquad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}\,,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x/2) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\sqrt{x^4+1} - x(2x+1)}{2(2x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^4 + 4 - 4x^4 - 4x^3 - x^2}{2(2x+1)[2\sqrt{x^4+1} + x(2x+1)]}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{4x^3}{16x^3} = -\frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad \text{è asintoto obliquo per } x \to \pm\infty\,.$$