SOLUZIONI COMPITO dell'8/02/2018
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo che $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, mentre $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{i\pi/3}$. Pertanto, z si riscrive nella forma

$$z = \frac{2\mathrm{e}^{i\pi/2}}{2\mathrm{e}^{i\pi 3}} = \mathrm{e}^{i\pi/6} = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad z^{36} = \left(\mathrm{e}^{i\pi/6}\right)^{36} = \mathrm{e}^{i6\pi} = 1\,.$$

Esercizio 2
Ricordando che

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0,$$

e sostituendo $y = \log(1+x) \sim x$, per $x \to 0$, si ottiene

$$\sin[\log(1+x)] = \log(1+x) - \frac{[\log(1+x)]^3}{6} + \frac{[\log(1+x)]^5}{5!} + o(x^5)\,.$$

Inserendo, poi, nel precedente sviluppo, lo sviluppo della funzione $x \mapsto \log(1+x)$, dato da

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\,, \qquad \text{per } x \to 0,$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}
\sin[\log(1+x)] &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) - \frac{1}{6}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right]^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right]^5 + o(x^5) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{1}{6}\left[x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^5 + x^5\right] + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + o(x^5)\,,
\end{aligned}$$

che è appunto lo sviluppo di Mc Laurin richiesto.

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(y) = y^3$, si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pertanto esiste un intorno I di 0 ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(I)$ del problema proposto. Poiché l'equazione differenziale ha come unico integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale, la soluzione del problema di Cauchy proposto si troverà fra quelle ottenibili per separazione di variabili; ovvero

$$-\frac{1}{2y^2(x)} = \int \frac{1}{y^3}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $-1 = -\frac{1}{2(1/2)} = -\frac{1}{2y^2(0)} = \arctan 0 + C$, che fornisce $C = -1$; pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2 - 2\arctan x}}\,.$$

Esercizio 4

Ovviamente il dominio D della funzione f è dato da $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \pm\infty;\\
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{-1+\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{2} = +\infty;\\
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{-1+\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{2} = -1/2;\\
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1+\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{2} = 1/2;\\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1+\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{2} = +\infty;
\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che $\frac{1}{x^2-1} \to 0$ per $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x^2-1} \to -\infty$ per $x \to -1^+$ o $x \to 1^-$, mentre $\frac{1}{x^2-1} \to +\infty$ per $x \to -1^-$ o $x \to 1^+$. Quindi, $x = \mp 1$ sono asintoti verticali per $x \to -1^-$ e $x \to 1^+$, rispettivamente, mentre non sono presenti asintoti orizzontali. Infine, poiché per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x$, controlliamo se essa ammetta asintoti obliqui. A tal fine calcoliamo

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left[1+\frac{1}{x^3}\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right]}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1;\\
q &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)-x^3-x}{x^2+1} \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x}{x^2} = 0\,.
\end{aligned}$$

Quindi, la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione $a)$ è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x^6 = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$\frac{\left[f\big(\sin(1/n)\big)\right]^2}{g(1/n)} = \frac{\left[\sin^3(1/n)\right]^2}{n^{-6}} = n^6\left(n^{-3}\right)^2 = 1 \not\to 0\,.$$

Pertanto, poiché il termine generale non è infinitesimo, la serie proposta diverge.

L'affermazione $b)$ è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$\frac{g(\mathrm{e}^{1/n}-1)}{f(n)} = \frac{\mathrm{e}^{1/n}-1}{n^3} = \frac{n^{-1}}{n^3} = \frac{1}{n^4}\,.$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica generalizzata di esponente $4 > 1$, la serie proposta converge.

L'affermazione $c)$ è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^4 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$\sqrt[4]{f(1/n)}\,\sqrt{g(1/n)} = \sqrt[4]{n^{-4}}\,\sqrt{n^{-1}} = n^{-1}n^{-1/2} = \frac{1}{n^{3/2}}\,.$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$, la serie proposta converge.

L'affermazione $d)$ è vera; infatti, per ipotesi, $0 < [f(1/\sqrt{n})]^2 g(1) \leq [1/n]^2 g(1) = g(1)/n^2$ e quest'ultimo è, a meno del fattore moltiplicativo strettamente positivo $g(1)$, il termine generale di una serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$; quindi la serie converge.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, mentre $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-i\pi/3}$. Pertanto, z si riscrive nella forma

$$z = \frac{2\mathrm{e}^{i\pi/2}}{2\mathrm{e}^{-i\pi/3}} = \mathrm{e}^{i5\pi/6} = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad z^{24} = \left(\mathrm{e}^{i5\pi/6}\right)^{24} = \mathrm{e}^{i20\pi} = 1\,.$$

Esercizio 2

Ricordando che

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0,$$

e sostituendo $y = \log(1-x) \sim x$, per $x \to 0$, si ottiene

$$\sinh[\log(1-x)] = \log(1-x) + \frac{[\log(1-x)]^3}{6} + \frac{[\log(1-x)]^5}{5!} + o(x^5)\,.$$

Inserendo, poi, nel precedente sviluppo, lo sviluppo della funzione $x \mapsto \log(1-x)$, dato da

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)\,, \qquad \text{per } x \to 0,$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}
\sinh[\log(1-x)] &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) + \frac{1}{6}\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right]^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!}\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right]^5 + o(x^5) \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{6}\left[-x^3 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^5 - x^5\right] - \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{2} + o(x^5)\,,
\end{aligned}$$

che è appunto lo sviluppo di Mc Laurin richiesto.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $g(y) = -y^4$, si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(-1,1)$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pertanto esiste un intorno I di 0 ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(I)$ del problema proposto. Poiché l'equazione differenziale ha come unico integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale, la soluzione del problema di Cauchy proposto si troverà fra quelle ottenibili per separazione di variabili; ovvero

$$\frac{1}{3y^3(x)} = -\int \frac{1}{y^4}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $1 = \frac{1}{3(1/3)} = \frac{1}{3y^3(0)} = \arcsin 0 + C$, che fornisce $C = 1$; pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3 + 3\arcsin x}}\,.$$

Esercizio 4

Ovviamente il dominio D della funzione f è dato da $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5}{x^4} = \pm\infty;$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{-1+\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{-1+\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{2} = -1/2;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1+\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{2} = 1/2;$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1+\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{2} = +\infty;$$

dove abbiamo tenuto conto che $\frac{1}{1-x^2} \to 0$ per $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{1-x^2} \to -\infty$ per $x \to -1^-$ o $x \to 1^+$, mentre $\frac{1}{1-x^2} \to +\infty$ per $x \to -1^+$ o $x \to 1^-$. Quindi, $x = \mp 1$ sono asintoti verticali per $x \to -1^-$ e $x \to 1^+$, rispettivamente, mentre non sono presenti asintoti orizzontali. Infine, poiché per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x$, controlliamo se essa ammetta asintoti obliqui. A tal fine calcoliamo

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5\left[1+\frac{1}{x^5}\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\right]}{(x^4+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5}{x^5} = 1;$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5 + \exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right) - x^5 - x}{x^4+1} \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x}{x^4} = 0\,.$$

Quindi, la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione $a)$ è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x^8 = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$\frac{g(1/n)}{\left[f\left(\sin(1/n)\right)\right]^2} = \frac{n^{-8}}{\left[\sin^3(1/n)\right]^2} = \frac{1}{n^8\,(n^{-3})^2} = \frac{1}{n^2}\,.$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, la serie proposta converge.

L'affermazione $b)$ è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x^5 = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$\frac{[f(1/n)]^2}{g(\mathrm{e}^{1/n} - 1)} = \frac{[n^{-3}]^2}{(\mathrm{e}^{1/n} - 1)^5} = \frac{n^{-6}}{n^{-5}} = \frac{1}{n}\,.$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica, essa diverge.

L'affermazione $c)$ è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = \sqrt{|x \log x|} = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$\frac{[g(1/n)]^2}{|\log[f(1/n)]|} = \frac{|(1/n)\log(1/n)|}{|\log(1/n^3)|} = \frac{\log n}{3n\log n} = \frac{1}{3n}\,.$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica, essa diverge.

L'affermazione $d)$ è vera; infatti, per ipotesi, $0 < f(1/n)[g(1)]^2 \le [1/n]^2[g(1)]^2 = [g(1)]^2/n^2$ e quest'ultimo è, a meno del fattore moltiplicativo strettamente positivo $[g(1)]^2$, il termine generale di una serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$; quindi la serie converge.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che $i = e^{i\pi/2}$, mentre $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$. Pertanto, z si riscrive nella forma

$$z = \frac{2e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/6}} = e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad z^{48} = \left(e^{i\pi/3}\right)^{48} = e^{i16\pi} = 1\,.$$

Esercizio 2

Ricordando che

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0,$$

e sostituendo $y = \log(1-x) \sim x$, per $x \to 0$, si ottiene

$$\sin[\log(1-x)] = \log(1-x) - \frac{[\log(1-x)]^3}{6} + \frac{[\log(1-x)]^5}{5!} + o(x^5)\,.$$

Inserendo, poi, nel precedente sviluppo, lo sviluppo della funzione $x \mapsto \log(1-x)$, dato da

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)\,, \qquad \text{per } x \to 0,$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}
\sin[\log(1-x)] &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) - \frac{1}{6}\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right]^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!}\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right]^5 + o(x^5) \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{1}{6}\left[-x^3 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^5 - x^5\right] - \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} + o(x^5)\,,
\end{aligned}$$

che è appunto lo sviluppo di Mc Laurin richiesto.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $g(y) = y^3$, si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(-1,1)$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pertanto esiste un intorno I di 0 ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(I)$ del problema proposto. Poiché l'equazione differenziale ha come unico integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale, la soluzione del problema di Cauchy proposto si troverà fra quelle ottenibili per separazione di variabili; ovvero

$$-\frac{1}{2y^2(x)} = \int \frac{1}{y^3}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $-1 = -\frac{1}{2(1/2)} = -\frac{1}{2y^2(0)} = \arcsin 0 + C$, che fornisce $C = -1$; pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2 - 2\arcsin x}}\,.$$

Esercizio 4

Ovviamente il dominio D della funzione f è dato da $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Inoltre, si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5}{x^4} = \pm\infty;\\
&\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{-1-\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{2} = -\infty;\\
&\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{-1-\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{2} = -1/2;\\
&\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{2} = 1/2;\\
&\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{2} = -\infty;
\end{aligned}
$$

dove abbiamo tenuto conto che $\frac{1}{x^2-1} \to 0$ per $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x^2-1} \to -\infty$ per $x \to -1^+$ o $x \to 1^-$, mentre $\frac{1}{x^2-1} \to +\infty$ per $x \to -1^-$ o $x \to 1^+$. Quindi, $x = \mp 1$ sono asintoti verticali per $x \to -1^-$ e $x \to 1^+$, rispettivamente, mentre non sono presenti asintoti orizzontali. Infine, poiché per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x$, controlliamo se essa ammetta asintoti obliqui. A tal fine calcoliamo

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5\left[1-\frac{1}{x^5}\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right]}{(x^4+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5}{x^5} = 1;\\
q &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5-\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)-x^5-x}{x^4+1} \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x}{x^4} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Quindi, la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione $a)$ è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x^8 = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$
\frac{g(1/n)}{\big[f\big(\sin(1/n)\big)\big]^2} = \frac{n^{-8}}{\big[\sin^3(1/n)\big]^2} = \frac{1}{n^8\,(n^{-3})^2} = \frac{1}{n^2}\,.
$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, la serie proposta converge.

L'affermazione $b)$ è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x^5 = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$
\frac{[f(1/n)]^2}{g(e^{1/n}-1)} = \frac{[n^{-3}]^2}{(e^{1/n}-1)^5} = \frac{n^{-6}}{n^{-5}} = \frac{1}{n}\,.
$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica, essa diverge.

L'affermazione $c)$ è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = \sqrt{|x\log x|} = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$
\frac{[g(1/n)]^2}{|\log[f(1/n)]|} = \frac{|(1/n)\log(1/n)|}{|\log(1/n^3)|} = \frac{\log n}{3n\log n} = \frac{1}{3n}\,.
$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica, essa diverge.

L'affermazione $d)$ è vera; infatti, per ipotesi, $0 < f(1/n)[g(1)]^2 \le [1/n]^2[g(1)]^2 = [g(1)]^2/n^2$ e quest'ultimo è, a meno del fattore moltiplicativo strettamente positivo $[g(1)]^2$, il termine generale di una serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$; quindi la serie converge.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, mentre $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-i\pi/6}$. Pertanto, z si riscrive nella forma

$$z = \frac{2\mathrm{e}^{i\pi/2}}{2\mathrm{e}^{-i\pi/6}} = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad z^{36} = \left(\mathrm{e}^{2i\pi/3}\right)^{36} = \mathrm{e}^{i24\pi} = 1\,.$$

Esercizio 2

Ricordando che

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0,$$

e sostituendo $y = \log(1+x) \sim x$, per $x \to 0$, si ottiene

$$\sinh[\log(1+x)] = \log(1+x) + \frac{[\log(1+x)]^3}{6} + \frac{[\log(1+x)]^5}{5!} + o(x^5)\,.$$

Inserendo, poi, nel precedente sviluppo, lo sviluppo della funzione $x \mapsto \log(1+x)$, dato da

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\,, \qquad \text{per } x \to 0,$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}
\sinh[\log(1+x)] &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) + \frac{1}{6}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right]^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right]^5 + o(x^5) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{1}{6}\left[x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^5 + x^5\right] + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\,,
\end{aligned}$$

che è appunto lo sviluppo di Mc Laurin richiesto.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(y) = -y^4$, si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pertanto esiste un intorno I di 0 ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(I)$ del problema proposto. Poiché l'equazione differenziale ha come unico integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale, la soluzione del problema di Cauchy proposto si troverà fra quelle ottenibili per separazione di variabili; ovvero

$$\frac{1}{3y^3(x)} = -\int \frac{1}{y^4}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $1 = \frac{1}{3(1/3)} = \frac{1}{3y^3(0)} = \arctan 0 + C$, che fornisce $C = 1$; pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3 + 3\arctan x}}\,.$$

Esercizio 4
Ovviamente il dominio D della funzione f è dato da $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \pm\infty;\\
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{-1-\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{2} = -\infty;\\
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{-1-\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{2} = -1/2;\\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{2} = 1/2;\\
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1-\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{2} = -\infty;
\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che $\frac{1}{1-x^2} \to 0$ per $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{1-x^2} \to -\infty$ per $x \to -1^-$ o $x \to 1^+$, mentre $\frac{1}{1-x^2} \to +\infty$ per $x \to -1^+$ o $x \to 1^-$. Quindi, $x = \mp 1$ sono asintoti verticali per $x \to -1^-$ e $x \to 1^+$, rispettivamente, mentre non sono presenti asintoti orizzontali. Infine, poiché per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x$, controlliamo se essa ammetta asintoti obliqui. A tal fine calcoliamo

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left[1-\frac{1}{x^3}\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\right]}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1;\\
q &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)-x^3-x}{x^2+1} \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x}{x^2} = 0\,.
\end{aligned}$$

Quindi, la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione *a*) è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x^6 = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$\frac{\left[f\left(\sin(1/n)\right)\right]^2}{g(1/n)} = \frac{\left[\sin^3(1/n)\right]^2}{n^{-6}} = n^6\left(n^{-3}\right)^2 = 1 \not\to 0\,.$$

Pertanto, poiché il termine generale non è infinitesimo, la serie proposta diverge.
L'affermazione *b*) è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^3 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$\frac{g(\mathrm{e}^{1/n}-1)}{f(n)} = \frac{\mathrm{e}^{1/n}-1}{n^3} = \frac{n^{-1}}{n^3} = \frac{1}{n^4}\,.$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica generalizzata di esponente $4 > 1$, la serie proposta converge.

L'affermazione *c*) è falsa; infatti, basta considerare $f(x) = x^4 = o(x^2)$, per $x \to 0$, e $g(x) = x = o(1)$, per $x \to 0$. In tal caso otteniamo che

$$\sqrt[4]{f(1/n)}\,\sqrt{g(1/n)} = \sqrt[4]{n^{-4}}\,\sqrt{n^{-1}} = n^{-1}n^{-1/2} = \frac{1}{n^{3/2}}\,.$$

Pertanto, poiché abbiamo una serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$, la serie proposta converge.
L'affermazione *d*) è vera; infatti, per ipotesi, $0 < [f(1/\sqrt{n})]^2 g(1) \le [1/n]^2 g(1) = g(1)/n^2$ e quest'ultimo è, a meno del fattore moltiplicativo strettamente positivo $g(1)$, il termine generale di una serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$; quindi la serie converge.