SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1. Osservando che, per $y \to 0$, $\mathrm{e}^y - 1 \sim y$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + 3x^2 - 5\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-5\sqrt{x}}{2x} = -\frac{5}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty \ .$$

Esercizio 2. Dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ottiene $F'(x) = 2\frac{\log(\mathrm{e}+4x^2)}{(4x^2+2)\mathrm{e}^{2x}}$, da cui $F'(0) = 1$.

Esercizio 3. Ponendo $w = z - 2$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $w^3 = 27$, da cui

$$w_0 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i \qquad w_1 = +3 \qquad w_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i \ .$$

Pertanto

$$z_0 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i \qquad z_1 = 5 \qquad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i \ .$$

Esercizio 4. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_0(t) = Ce^{3t}$. Per determinare una soluzione particolare si può utilizzare il metodo di somiglianza:

$$y_p = at + b \quad \Rightarrow \quad y_p' - 3y_p = a - 3at - 3b = 2t \quad \Longleftrightarrow \quad a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{2}{9}.$$

Pertanto

$$y(t) = Ce^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}.$$

Esercizio 5. Poichè D è simmetrico rispetto all'asse x ed $f(x,y) = y$ è dispari rispetto ad y, l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 6. Osserviamo innanzitutto che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, quindi la serie proposta si può riscrivere come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{dove} \qquad a_n = \frac{1}{3n + 2\cos n} > 0 \qquad \forall n \geq 0 \ .$$

Ovviamente $a_n \to 0$ e $a_n \sim \frac{1}{3n}$, pertanto la serie proposta non converge assolutamente. D'altra parte, se consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{3x+2\cos x}$, risulta che essa è monotona decrescente, in quanto $f'(x) = -\frac{3-2\sin x}{(3x+2\cos x)^2} < 0$ per tutti gli $x \geq 0$. Da ciò segue che anche la successione $\{a_n\}$ è monotona decrescente e quindi la serie proposta converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

Esercizio 7. Osserviamo che $f(0) = 27$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + 2x}{3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{3x} = 2/3$. Inoltre, per $-2 \leq x < 0$ $f'(x) = 6x + 20 > 0$, cioè f è crescente, mentre per $0 < x \leq 5$ $f'(x) = -1/3 < 0$, cioè f è decrescente. Da ciò segue subito che $x = 0$ è punto di massimo assoluto per f in $[-2, 5]$.

Domanda 1. L'unica affermazione errata è la C.

Domanda 2. Poiché f è continua, si ha

$$\lim_{x\to 0} f\Big(2\cos(\pi x)\Big) = f(2) = 1 \ .$$

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1. Osservando che, per $y \to 0$, $\sin y \sim y$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{\frac{1}{4}\sqrt[3]{x} + x^2 + \frac{1}{2}x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{\frac{1}{4}\sqrt[3]{x}} = 12 \lim_{x\to 0^+} x^{2/3} = 0 \ .$$

Esercizio 2. Dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ottiene $F'(x) = 4\frac{e^{4x}}{(|4x|+1)\cosh(4x)}$, da cui $F'(0) = 4$.

Esercizio 3. Ponendo $w = z + 2$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $w^3 = -27$, da cui

$$w_0 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \qquad w_1 = -3 \qquad w_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \ .$$

Pertanto

$$z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \qquad z_1 = -5 \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \ .$$

Esercizio 4. L'integrale generale dell'omogenea associata è $y_0(t) = Ce^{-t}$. Per determinare una soluzione particolare si può utilizzare il metodo di somiglianza:

$$y_p = at + b \quad \Rightarrow \quad y_p' + y_p = a + at + b = 1 - t \quad \Longleftrightarrow \quad a = -1, b = 2.$$

Pertanto

$$y(t) = Ce^{-t} - t + 2.$$

Esercizio 5. Poichè D è simmetrico rispetto all'asse y ed $f(x, y) = x^3$ è dispari rispetto ad x, l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 6. Osserviamo innanzitutto che $\sin[(2n + 1)\pi/2] = (-1)^n$, quindi la serie proposta si può riscrivere come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{dove} \qquad a_n = \frac{1}{4n + \sin(n/2)} > 0 \qquad \forall n \geq 1 \ .$$

Ovviamente $a_n \to 0$ e $a_n \sim \frac{1}{4n}$, pertanto la serie proposta non converge assolutamente. D'altra parte, se consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{4x+\sin(x/2)}$, risulta che essa è monotona decrescente, in quanto $f'(x) = -\frac{4+\frac{1}{2}\cos(x/2)}{(4x+\sin(x/2))^2} < 0$ per tutti gli $x \geq 1$. Da ciò segue che anche la successione $\{a_n\}$ è monotona decrescente e quindi la serie proposta converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

Esercizio 7. Osserviamo che $f(0) = -16$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 2x^3}{3x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{3x^2} = 1/3$. Inoltre, per $-5 \leq x < 0$ $f'(x) = -2/3 < 0$, cioè f è decrescente, mentre per $0 < x \leq 2$ $f'(x) = -6x + 16 > 0$, cioè f è crescente. Da ciò segue subito che $x = 0$ è punto di minimo assoluto per f in $[-5, 2]$.

Domanda 1. L'unica affermazione corretta è la A.

Domanda 2. Poiché f è continua, si ha

$$\lim_{x\to 1} f\Big(\sin(\frac{\pi}{2}x)\Big) = f(1) = 3 \ .$$

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1. Osservando che, per $y \to 0$, $\log(1+y) \sim y$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3\sqrt[3]{x})}{x+2x^4+\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt[3]{x}}{x} = 3 \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty \ .$$

Esercizio 2. Dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ottiene $F'(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$, da cui $F'(0) = 1/4$.

Esercizio 3. Ponendo $w = z + 4$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $w^3 = -8$, da cui

$$w_0 = 1 + i\sqrt{3} \qquad w_1 = -2 \qquad w_2 = 1 - i\sqrt{3} \ .$$

Pertanto

$$z_0 = -3 + i\sqrt{3} \qquad z_1 = -6 \qquad z_2 = -3 - i\sqrt{3} \ .$$

Esercizio 4. L'integrale generale dell'omogenea associata è $y_0(t) = Ce^{-4t}$. Per determinare una soluzione particolare si può utilizzare il metodo di somiglianza:

$$y_p = at + b \quad \Rightarrow \quad y_p' + 4y_p = a + 4at + 4b = 5t + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 5/4, b = -1/16.$$

Pertanto

$$y(t) = Ce^{-4t} + \frac{5}{4}t - \frac{1}{16}.$$

Esercizio 5. Poichè D è simmetrico rispetto all'asse y ed $f(x,y) = x$ è dispari rispetto ad x, l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 6. Osserviamo innanzitutto che $\sin[(2n+1)\pi/2] = (-1)^n$, quindi la serie proposta si può riscrivere come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{dove} \qquad a_n = \frac{1}{n + \cos(n/3)} > 0 \qquad \forall n \geq 0 \ .$$

Ovviamente $a_n \to 0$ e $a_n \sim \frac{1}{n}$, pertanto la serie proposta non converge assolutamente. D'altra parte, se consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x+\cos(x/3)}$, risulta che essa è monotona decrescente, in quanto $f'(x) = -\frac{1-\frac{1}{3}\sin(x/3)}{(x+\cos(x/3))^2} < 0$ per tutti gli $x \geq 0$. Da ciò segue che anche la successione $\{a_n\}$ è monotona decrescente e quindi la serie proposta converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

Esercizio 7. Osserviamo che $f(0) = -9$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{-2x-3x^2}{5x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{5x} = -2/5$. Inoltre, per $-2 \leq x < 0$ $f'(x) = -3/5 < 0$, cioè f è decrescente, mentre per $0 < x \leq 1$ $f'(x) = -x + 4 > 0$, cioè f è crescente. Da ciò segue subito che $x = 0$ è punto di minimo assoluto per f in $[-2, 1]$.

Domanda 1. L'unica affermazione corretta è la B.

Domanda 2. Poiché f è continua, si ha

$$\lim_{x\to 2} f\Big(2 + \sin(\pi x)\Big) = f(2) = 1/2 \ .$$

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1. Osservando che, per $y \to 0$, $\sinh y \sim y$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5x^2 + 12x^3 + 3x^{7/2}}{\sinh(2x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x^2}{2x^2} = \frac{5}{2} \ .$$

Esercizio 2. Dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ottiene $F'(x) = 3\frac{\log(2+|3x|)}{e^x+3}$, da cui $F'(0) = \frac{3}{4}\log 2$.

Esercizio 3. Ponendo $w = z - 4$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $w^3 = 8$, da cui

$$w_0 = -1 + i\sqrt{3} \qquad\qquad w_1 = 2 \qquad\qquad w_2 = -1 - i\sqrt{3} \ .$$

Pertanto

$$z_0 = 3 + i\sqrt{3} \qquad\qquad z_1 = 6 \qquad\qquad z_2 = 3 - i\sqrt{3} \ .$$

Esercizio 4. L'integrale generale dell'omogenea associata è $y_0(t) = Ce^{2t}$. Per determinare una soluzione particolare si può utilizzare il metodo di somiglianza:

$$y_p = at + b \quad \Rightarrow \quad y_p' - 2y_p = a - 2at - 2b = 3t + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = -3/2, b = -7/4.$$

Pertanto

$$y(t) = Ce^{2t} - \frac{3}{2}t - \frac{7}{4}.$$

Esercizio 5. Poichè D è simmetrico rispetto all'asse x ed $f(x, y) = y^5$ è dispari rispetto ad y, l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 6. Osserviamo innanzitutto che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, quindi la serie proposta si può riscrivere come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad\qquad \text{dove} \qquad\qquad a_n = \frac{1}{2n + 2\sin n} > 0 \qquad \forall n \geq 1 \ .$$

Ovviamente $a_n \to 0$ e $a_n \sim \frac{1}{2n}$, pertanto la serie proposta non converge assolutamente. D'altra parte, se consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{2x+2\sin x}$, risulta che essa è monotona decrescente, in quanto $f'(x) = -\frac{2+2\cos x}{(2x+2\sin x)^2} < 0$ per tutti gli $x \geq 1$. Da ciò segue che anche la successione $\{a_n\}$ è monotona decrescente e quindi la serie proposta converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

Esercizio 7. Osserviamo che $f(0) = 8$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-3x^2 - x^3}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3x^2}{2x^2} = -3/2$. Inoltre, per $-1 \leq x < 0$ $f'(x) = 6(3x^2 + 2x + 2) > 0$, cioè f è crescente, mentre per $0 < x \leq 10$ $f'(x) = -1/2 < 0$, cioè f è decrescente. Da ciò segue subito che $x = 0$ è punto di massimo assoluto per f in $[-1, 10]$.

Domanda 1. L'unica affermazione errata è la D.

Domanda 2. Poiché f è continua, si ha

$$\lim_{x\to 1} f\Big(\cos(\frac{\pi}{2}x)\Big) = f(0) = 4 \ .$$