SOLUZIONI COMPITO del 08/06/2009
ANALISI 1 - INFORMATICA 12 CFU + AUTOMATICA 5+5 CFU
ANLISI 1 (I MODULO) - INFORMATICA + AUTOMATICA 5 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo che possiamo scrivere

$$\frac{3-2i}{5+i} = \frac{3-2i}{5+i} \cdot \frac{5-i}{5-i} = \frac{13-13i}{26} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \, \mathrm{e}^{-i\pi/4} \, .$$

Pertanto

$$\sqrt[3]{\frac{3-2i}{5+i}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}} \, \mathrm{e}^{-i\pi/4}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}; \\ \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \, \mathrm{e}^{i\frac{7}{12}\pi}; \\ \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \, \mathrm{e}^{i\frac{15}{12}\pi}. \end{cases}$$

Esercizio 2
Ricordando la definizione di successioni asintotiche, la relazione sarà verificata se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}}{\mathrm{e}^{3n-9/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n^2 \log\left(1+\frac{3}{n}\right)}}{\mathrm{e}^{3n-9/2}} = 1 \, .$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 3/n$, si ricava

$$\log\left(1+\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n} - \frac{9}{2n^2} + \frac{9}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}}{\mathrm{e}^{3n-9/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n^2 \log\left(1+\frac{3}{n}\right)}}{\mathrm{e}^{3n-9/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n^2\left(\frac{3}{n}-\frac{9}{2n^2}+\frac{9}{n^3}\right)}}{\mathrm{e}^{3n-9/2}} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{3n-9/2+9/n^3-3n+9/2} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{9/n} = 1 \, .$$

Esercizio 3
Poiché f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-1,1]$, per il Teorema di Weierstrass essa ammette almeno un punto di massimo assoluto ed un punto di minimo assoluto in tale intervallo. Osserviamo che

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{5}x^{-3/5}(x-3) - x^{2/5}}{(x-3)^2} = -\frac{3x+6}{5x^{3/5}(x-3)^2} \begin{cases} <0 & \text{se } x>0, \\ >0 & \text{se } x<0, \end{cases}$$

se $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, mentre

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \mp\infty \, .$$

Pertanto, la funzione assegnata non è derivabile in $x=0$ e presenta in tale punto una cuspide. Inoltre, dal segno della derivata, si ricava che f è decrescente in $(0,1]$ mentre è crescente in $[-1,0)$, quindi $x=\pm1$ sono punti di minimo relativo ed $x=0$ è punto di massimo assoluto. Per stabilire qual è il punto di minimo assoluto valutiamo la funzione nei due punti di minimo relativo, ottenendo $f(-1) = -1/4$ ed $f(1) = -1/2$, quindi il punto di minimo assoluto è $x=1$.

Domanda 1
La risposta corretta è la b), infatti dalle ipotesi si ricava che f deve essere convessa a $+\infty$, visto che tende all'asintoto orizzontale per eccesso; tuttavia, essendo strettamente concava in x_0, dove assume un massimo positivo, deve fare almeno un cambio di concavità, cioè deve avere almeno un punto di flesso. Da quel momento in poi, dovendo terminare convessa, f può fare eventualmente solo doppi cambi di concavità, quindi, in totale, avrà un numero dispari di flessi. La risposta a), invece, è errata, poiché considerando, ad esempio, una funzione che dopo il massimo x_0 decresca fino ad un minimo negativo $x_1 > x_0$ e poi cresca fino a raggiungere asintoticamente l'asse x a $+\infty$, si ottiene che essa soddisfa tutte le ipotesi, ma ha due punti di flesso in $(x_0, +\infty)$, cioè un numero pari e non dispari di flessi.

Esercizio 4
Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Pertanto, dopo aver calcolato i due integrali seguenti:

$$\frac{1}{2}\int_1^x t^2\,dt = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6} \qquad\qquad \frac{9}{4}\int_1^x \mathrm{e}^{(t^3/6-1/6)}\,t^2\,dt = \frac{9}{2}\left[\mathrm{e}^{(x^3/6-1/6)} - 1\right],$$

utilizzando la formula risolutiva, otteniamo

$$y(x) = 4\,\mathrm{e}^{(1/6-x^3/6)} + \frac{9}{2}\,\mathrm{e}^{(1/6-x^3/6)}\left[\mathrm{e}^{(x^3/6-1/6)} - 1\right] = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(1/6-x^3/6)} + \frac{9}{2}\,.$$

Esercizio 5
Osserviamo che $\nabla f(0,1) = (y\mathrm{e}^{xy}, 2y + x\mathrm{e}^{xy})|_{(0,1)} = (1,2)$, quindi l'equazione del piano tangente richiesto sarà: $z = x + 2(y-1) + 2$.

Esercizio 6
Poiché la funzione proposta è positiva e continua in $[1,+\infty)$, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno di $+\infty$. Osserviamo che, per $x \to +\infty$, si ha

$$0 \le f(x) \le \frac{3}{6\,x^{7/2}} = \frac{1}{2x^{7/2}}\,.$$

Poiché $7/2 > 1$, dal criterio del confronto, si ottiene che l'integrale proposto converge.

Domanda 2
Poiché la funzione integranda è continua, dal Teorema di Torricelli, otteniamo

$$F'(x) = (x^2-4)f'(x)\begin{cases} \ge 0 & \text{se } x < -2 \text{ e } x > 2; \\ \le 0 & \text{se } -2 < x < 2; \\ = 0 & \text{se } x = \pm 2; \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, dall'ipotesi di monotonia su f, si ha $f' \ge 0$. Quindi F è crescente in $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$, decrescente in $(-2,2)$ ed ha un punto di massimo relativo in $x = -2$ ed un punto di minimo relativo in $x = 2$.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che possiamo scrivere

$$\frac{2-3i}{1+5i} = \frac{2-3i}{1+5i} \cdot \frac{1-5i}{1-5i} = -\frac{13+13i}{26} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{5i\pi/4} .$$

Pertanto

$$\sqrt[4]{\frac{2-3i}{1+5i}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{5i\pi/4}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[8]{2}} e^{i\frac{5}{16}\pi}; \\ \frac{1}{\sqrt[8]{2}} e^{i\frac{13}{16}\pi}; \\ \frac{1}{\sqrt[8]{2}} e^{i\frac{21}{16}\pi}; \\ \frac{1}{\sqrt[8]{2}} e^{i\frac{29}{16}\pi}. \end{cases}$$

Esercizio 2

Ricordando la definizione di *"o" piccolo*, la relazione sarà verificata se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-2n-\sqrt{n}}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-2n-\sqrt{n}}}{e^{n^2\log(1-2/n)}} = 0 .$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = -2/n$, si ricava

$$\log\left(1-\frac{2}{n}\right) = -\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-2n-\sqrt{n}}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-2n-\sqrt{n}}}{e^{n^2\log(1-2/n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-2n-\sqrt{n}}}{e^{n^2(-2/n-2/n^2)}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-2n-\sqrt{n}+2n+2} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}+2} = 0 .$$

Esercizio 3

Poiché f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1,5]$, per il Teorema di Weierstrass essa ammette almeno un punto di massimo assoluto ed un punto di minimo assoluto in tale intervallo. Osserviamo che

$$f'(x) = -\frac{\frac{3}{7}(x-3)^{-4/7}x - (x-3)^{3/7}}{x^2} = -\frac{21-4x}{7x^2(x-3)^{4/7}} < 0$$

se $x \in [1,5] \setminus \{3\}$, mentre

$$\lim_{x\to 3^\pm} f'(x) = -\infty .$$

Pertanto, la funzione assegnata non è derivabile in $x = 3$ e presenta in tale punto un flesso a tangente verticale. Inoltre, dal segno della derivata, si ricava che f è decrescente in $[1,5]$, quindi $x = 1$ è punto di massimo assoluto ed $x = 5$ è punto di minimo assoluto.

Domanda 1

La risposta corretta è la a), infatti dalle ipotesi si ricava che f è strettamente concava in x_0, dove assume un massimo positivo, e deve decrescere fino ad un minimo negativo $x_1 > x_0$, visto che tende all'asintoto orizzontale per difetto; inoltre, per la stessa ragione, f sarà concava a $+\infty$. Pertanto, deve fare necessariamente due cambi di concavità, cioè deve avere almeno due punti di flesso. Da quel momento in poi, dovendo terminare concava, f può fare eventualmente solo doppi cambi di concavità, quindi, in totale avrà un numero pari di flessi. La risposta b), invece, è errata, poiché considerando, ad esempio, una funzione che dopo il massimo x_0 decresca fino a raggiungere asintoticamente l'asse x a $+\infty$, si ottiene che essa soddisfa tutte le ipotesi, ma ha un solo punto di flesso in $(x_0,+\infty)$, cioè un numero dispari e non pari di flessi.

Esercizio 4

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Pertanto, dopo aver calcolato i due integrali seguenti:

$$-\frac{1}{2}\int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4} \qquad\qquad \frac{9}{4}\int_2^x \mathrm{e}^{(1/2t-1/4)}\,\frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{9}{2}\,[\mathrm{e}^{(1/2x-1/4)} - 1]\,,$$

utilizzando la formula risolutiva, otteniamo

$$y(x) = 2\,\mathrm{e}^{(1/4-1/2x)} - \frac{9}{2}\,\mathrm{e}^{(1/4-1/2x)}[\mathrm{e}^{(1/2x-1/4)} - 1] = \frac{13}{2}\,\mathrm{e}^{(1/4-1/2x)} - \frac{9}{2}\,.$$

Esercizio 5

Osserviamo che $\nabla f(1,0) = (\frac{y-1}{2+x(y-1)} + 2xy, \frac{x}{2+x(y-1)} + x^2)|_{(1,0)} = (-1,2)$, quindi l'equazione del piano tangente richiesto sarà: $z = -(x-1) + 2y$.

Esercizio 6

Poiché la funzione proposta è positiva e continua in $[1,+\infty)$, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno di $+\infty$. Osserviamo che, per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \leq \frac{5}{4\,(\arctan 1)^{2/3}\,x^2}\,.$$

Poiché $2 > 1$, dal criterio del confronto, si ottiene che l'integrale proposto converge.

Domanda 2

Poiché la funzione integranda è continua, dal Teorema di Torricelli, otteniamo

$$F'(x) = (1-\mathrm{e}^x)f'(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x < 0; \\ \geq 0 & \text{se } x > 0; \\ = 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, dall'ipotesi di monotonia su f, si ha $f' \leq 0$. Quindi F è crescente in $(0,+\infty)$, decrescente in $(-\infty,0)$ ed ha un punto di minimo relativo e assoluto in $x = 0$.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che possiamo scrivere

$$\frac{2+3i}{1-5i} = \frac{2+3i}{1-5i}\cdot\frac{1+5i}{1+5i} = \frac{-13+13i}{26} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{3i\pi/4}\,.$$

Pertanto

$$\sqrt[4]{\frac{2+3i}{1-5i}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{3i\pi/4}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3}{16}\pi}; \\ \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{11}{16}\pi}; \\ \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{19}{16}\pi}; \\ \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{27}{16}\pi}. \end{cases}$$

Esercizio 2

Ricordando la definizione di *"o" piccolo*, la relazione sarà verificata se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n^2-3n}}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^4}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n^2-3n}}{\mathrm{e}^{n^4\log(1-1/n^2)}} = 0\,.$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = -1/n^2$, si ricava

$$\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n^2-3n}}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^4}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n^2-3n}}{\mathrm{e}^{n^4\log(1-1/n^2)}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n^2-3n}}{\mathrm{e}^{n^4(-1/n^2-1/2n^4)}} =$$
$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n^2-3n+n^2+1/2} = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-3n+1/2} = 0\,.$$

Esercizio 3

Poiché f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[2,6]$, per il Teorema di Weierstrass essa ammette almeno un punto di massimo assoluto ed un punto di minimo assoluto in tale intervallo. Osserviamo che

$$f'(x) = \frac{\frac{5}{7}(x-4)^{-2/7}(x-1) - (x-4)^{5/7}}{(x-1)^2} = \frac{23-2x}{7(x-1)^2(x-4)^{2/7}} > 0$$

se $x \in [2,6]\setminus\{4\}$, mentre

$$\lim_{x\to4^\pm} f'(x) = +\infty\,.$$

Pertanto, la funzione assegnata non è derivabile in $x = 4$ e presenta in tale punto un flesso a tangente verticale. Inoltre, dal segno della derivata, si ricava che f è crescente in $[2,6]$, quindi $x = 6$ è punto di massimo assoluto ed $x = 2$ è punto di minimo assoluto.

Domanda 1

La risposta corretta è la a), infatti dalle ipotesi si ricava che f è strettamente concava in x_0, dove assume un massimo positivo, e deve decrescere fino ad un minimo negativo $x_1 > x_0$, visto che tende all'asintoto orizzontale per difetto; inoltre, per la stessa ragione, f sarà concava a $+\infty$. Pertanto, deve fare necessariamente due cambi di concavità, cioè deve avere almeno due punti di flesso. Da quel momento in poi, dovendo terminare concava, f può fare eventualmente solo doppi cambi di concavità, quindi, in totale avrà un numero pari di flessi. La risposta b), invece, è errata, poiché considerando, ad esempio, una funzione che dopo il massimo x_0 decresca fino a raggiungere asintoticamente l'asse x a $+\infty$, si ottiene che essa soddisfa tutte le ipotesi, ma ha un solo punto di flesso in $(x_0,+\infty)$, cioè un numero dispari e non pari di flessi.

Esercizio 4

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Pertanto, dopo aver calcolato i due integrali seguenti:

$$-\frac{3}{2}\int_1^x \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{3}{4x^2} - \frac{3}{4} \qquad\qquad 4\int_1^x \mathrm{e}^{(3/4t^2-3/4)}\,\frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{8}{3}\,[\mathrm{e}^{(3/4x^2-3/4)} - 1]\,,$$

utilizzando la formula risolutiva, otteniamo

$$y(x) = 2\,\mathrm{e}^{(3/4-3/4x^2)} - \frac{8}{3}\,\mathrm{e}^{(3/4-3/4x^2)}[\mathrm{e}^{(3/4x^2-3/4)} - 1] = \frac{14}{3}\,\mathrm{e}^{(3/4-3/4x^2)} - \frac{8}{3}\,.$$

Esercizio 5

Osserviamo che $\nabla f(2,0) = (-\frac{y-1}{2-x(y-1)} + 2xy, -\frac{x}{2-x(y-1)} + x^2)|_{(2,0)} = (1/4, 7/2)$, quindi l'equazione del piano tangente richiesto sarà: $z = (1/4)(x-2) + (7/2)y + \log 4$.

Esercizio 6

Poiché la funzione proposta è positiva e continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno di 0^+. Osserviamo che, per $x \to 0^+$, utilizzando il fatto che $\arctan x \sim x$, si ha

$$f(x) \sim \frac{4}{25x^{2/3}}\,.$$

Poiché $2/3 < 1$, dal criterio del confronto asintotico, si ottiene che l'integrale proposto converge.

Domanda 2

Poiché la funzione integranda è continua, dal Teorema di Torricelli, otteniamo

$$F'(x) = (\mathrm{e}^x - 1)f'(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x < 0; \\ \leq 0 & \text{se } x > 0; \\ = 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, dall'ipotesi di monotonia su f, si ha $f' \leq 0$. Quindi F è decrescente in $(0, +\infty)$, crescente in $(-\infty, 0)$ ed ha un punto di massimo relativo e assoluto in $x = 0$.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che possiamo scrivere

$$\frac{3+2i}{5-i}=\frac{3+2i}{5-i}\cdot\frac{5+i}{5+i}=\frac{13+13i}{26}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\,.$$

Pertanto

$$\sqrt[3]{\frac{3+2i}{5-i}}=\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}};\\ \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{9}{12}\pi}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3}{4}\pi};\\ \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{17}{12}\pi}.\end{cases}$$

Esercizio 2

Ricordando la definizione di successioni asintotiche, la relazione sarà verificata se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{2n^4}}{\mathrm{e}^{8n^2-16}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2n^4\log\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}}{\mathrm{e}^{8n^2-16}}=1\,.$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t\mapsto\log(1+t)$, con $t=4/n^2$, si ricava

$$\log\left(1+\frac{4}{n^2}\right)=\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^4}+\frac{64}{3n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{2n^4}}{\mathrm{e}^{8n^2-16}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2n^4\log\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}}{\mathrm{e}^{8n^2-16}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2n^4\left(\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^4}+\frac{64}{3n^6}\right)}}{\mathrm{e}^{8n^2-16}}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{8n^2-16+128/3n^2-8n^2+16}=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{128/3n^2}=1\,.$$

Esercizio 3

Poiché f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,2]$, per il Teorema di Weierstrass essa ammette almeno un punto di massimo assoluto ed un punto di minimo assoluto in tale intervallo. Osserviamo che

$$f'(x)=\frac{\frac{4}{5}(x-1)^{-1/5}(x+1)-(x-1)^{4/5}}{(x+1)^2}=\frac{9-x}{5(x-1)^{1/5}(x+1)^2}\begin{cases}>0 & \text{se } x>1,\\ <0 & \text{se } x<1,\end{cases}$$

se $x\in[0,2]\setminus\{1\}$, mentre

$$\lim_{x\to1^\pm}f'(x)=\pm\infty\,.$$

Pertanto, la funzione assegnata non è derivabile in $x=1$ e presenta in tale punto una cuspide. Inoltre, dal segno della derivata, si ricava che f è decrescente in $[0,1)$ mentre è crescente in $(1,2]$, quindi $x=0,2$ sono punti di massimo relativo ed $x=1$ è punto di minimo assoluto. Per stabilire qual è il punto di massimo assoluto valutiamo la funzione nei due punti di massimo relativo, ottenendo $f(0)=1$ ed $f(2)=1/3$, quindi il punto di massimo assoluto è $x=0$.

Domanda 1

La risposta corretta è la b), infatti dalle ipotesi si ricava che f deve essere convessa a $+\infty$, visto che tende all'asintoto orizzontale per eccesso; tuttavia, essendo strettamente concava in x_0, dove assume un massimo positivo, deve fare almeno un cambio di concavità, cioè deve avere almeno un punto di flesso. Da quel momento in poi, dovendo terminare convessa, f può fare eventualmente solo doppi cambi di concavità, quindi, in totale, avrà un numero dispari di flessi. La risposta a), invece, è errata, poiché considerando, ad esempio, una funzione che dopo il massimo x_0 decresca fino ad un minimo negativo $x_1>x_0$ e poi cresca fino a raggiungere asintoticamente l'asse x a $+\infty$, si ottiene che essa soddisfa tutte le ipotesi, ma ha due punti di flesso in $(x_0,+\infty)$, cioè un numero pari e non dispari di flessi.

Esercizio 4

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Pertanto, dopo aver calcolato i due integrali seguenti:

$$\frac{3}{2}\int_1^x t^3\,dt = \frac{3x^4}{8} - \frac{3}{8} \qquad\qquad 4\int_1^x \mathrm{e}^{(3t^4/8-3/8)}\,t^3\,dt = \frac{8}{3}\,[\mathrm{e}^{(3x^4/8-3/8)} - 1]\,,$$

utilizzando la formula risolutiva, otteniamo

$$y(x) = 2\,\mathrm{e}^{(3/8-3x^4/8)} + \frac{8}{3}\,\mathrm{e}^{(3/8-3x^4/8)}[\mathrm{e}^{(3x^4/8-3/8)} - 1] = -\frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{(3/8-3x^4/8)} + \frac{8}{3}\,.$$

Esercizio 5

Osserviamo che $\nabla f(0,2) = (2x - y\mathrm{e}^{-xy+y}, (1-x)\mathrm{e}^{-xy+y})|_{(0,2)} = (-2\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2)$, quindi l'equazione del piano tangente richiesto sarà: $z = -2\mathrm{e}^2 x + \mathrm{e}^2(y-2) + \mathrm{e}^2$.

Esercizio 6

Poiché la funzione proposta è positiva e continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento di f in un intorno di 0^+. Osserviamo che, per $x \to 0^+$, utilizzando il fatto che $\log(1+x) \sim x$, si ha

$$f(x) \sim \frac{3}{2x^{1/3}}\,.$$

Poiché $1/3 < 1$, dal criterio del confronto asintotico, si ottiene che l'integrale proposto converge.

Domanda 2

Poiché la funzione integranda è continua, dal Teorema di Torricelli, otteniamo

$$F'(x) = (9-x^2)f'(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x < -3 \text{ e } x > 3; \\ \geq 0 & \text{se } -3 < x < 3; \\ = 0 & \text{se } x = \pm 3; \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, dall'ipotesi di monotonia su f, si ha $f' \geq 0$. Quindi F è decrescente in $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$, crescente in $(-3,3)$ ed ha un punto di massimo relativo in $x=3$ ed un punto di minimo relativo in $x=-3$.