CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 8 giugno 2010	**TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I <u>NON</u> devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,2^n}{n^{2\alpha n}} .$$

---

2. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y(x) = x\mathrm{e}^{2x} .$$

---

3. Data la famiglia di funzioni $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_\alpha(x) = x\sin(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, determinare le eventuali primitive $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni $F_\alpha(0) = -1$ ed $F_\alpha(\frac{\pi}{2\alpha}) = 3$.

---

4. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z - i)^4 + 16 = 0 .$$

5.

1) Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ una funzione assegnata, il cui sviluppo di Mc Laurin all'ordine 7 sia dato dall'espressione $f(x) = 3x^5 + 2x^7 + o(x^7)$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere, giustificando la risposta, e fornire un controesempio per quelle false:

a) f è necessariamente dispari; *b*) $3f(x^2) - f^2(x) \sim 2x^{14}$;

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ converge; *d*) $f^{(5)}(0) = 360$.

---

6. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \log(xy^2 + x^2y) ,$$

determinare il suo insieme di definizione D .

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 8 giugno 2010	**TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\alpha n/2}}{n!\,3^n}\,.$$

---

2. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$4y''(x) - y(x) = x\mathrm{e}^{x/2}\,.$$

---

3. Data la famiglia di funzioni $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_\alpha(x) = x\cos(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, determinare le eventuali primitive $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni $F_\alpha(0) = 1$ ed $F_\alpha(\frac{\pi}{\alpha}) = -1$.

---

4. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z + 2i)^4 + 81 = 0\,.$$

5.

1) Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ una funzione assegnata, il cui sviluppo di Mc Laurin all'ordine 6 sia dato dall'espressione $f(x) = 4x^4 + x^6 + o(x^6)$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere, giustificando la risposta, e fornire un controesempio per quelle false:

$a)$ $4f(x^2) - f^2(x) \sim 3x^{12}$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$ converge;

$c)$ f è necessariamente pari; $\qquad d)$ $f^{(6)}(0) = 720$.

---

6. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = \log(xy^2 + x^2y)\,,$$

determinare il suo insieme di definizione D .