SOLUZIONI COMPITO dell'8/06/2017
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, da cui $\overline{z} = a - ib$, e ricordando che $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\mathrm{e}^{a/3 - ib/3} = 2\mathrm{e}^{i\pi/2} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^{a/3} = 2, \\ -b/3 + 2k\pi = \pi/2, \; k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = 3\log 2, \\ b = -3\pi/2 + 6k\pi, \; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pertanto, l'equazione proposta ammette infinite soluzioni della forma $z = 3\log 2 - i(3\pi/2 + 6k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin al quinto ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = \frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}$ e quello al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \cosh x$, con $x = \sqrt{\frac{2}{n+4}}$, ovvero

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}\right) &= \frac{1}{\sqrt[3]{n+4}} - \frac{1}{3!(\sqrt[3]{n+4})^3} + \frac{1}{5!(\sqrt[3]{n+4})^5} + o\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right), \\ \cosh\sqrt{\frac{2}{n+4}} &= 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{n+4}}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\sqrt{\frac{2}{n+4}}\right)^4 + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

possiamo riscrivere il limite proposto nella forma

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{6\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}\right) + \cosh\sqrt{\frac{2}{n+4}} - 1 - \frac{6}{\sqrt[3]{n+4}}}{\sqrt[3]{\log\left(1+\frac{1}{n^5}\right)}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{6}{\sqrt[3]{n+4}} - \frac{1}{n+4} + \frac{6}{5!(n+4)^{5/3}} + o\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right) + 1 + \frac{1}{n+4} + \frac{4}{4!(n+4)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 - \frac{6}{\sqrt[3]{n+4}}}{\sqrt[3]{\log\left(1+\frac{1}{n^5}\right)}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{20(n+4)^{5/3}} + o\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right)}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^5}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/3}}{20n^{5/3}} = \frac{1}{20}, \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto anche del fatto che $\log\left(1+\frac{1}{n^5}\right) \sim \frac{1}{n^5}$.

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Poiché $f(x) = x\arctan x \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g(y) = \mathrm{e}^{2y} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita in un intorno del punto iniziale $x_0 = 1$. Poiché l'equazione $\mathrm{e}^{2y} = 0$ non ammette soluzioni, l'equazione differenziale non ammette soluzioni singolari; quindi, la soluzione del nostro problema andrà cercata tra quelle ottenute per separazione di variabili. Ricaviamo così

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2y} &= \int \mathrm{e}^{-2y}\,dy = \int x\arctan x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + C\,. \end{aligned}$$

Invertendo la precedente equazione si ottiene

$$\mathrm{e}^{-2y(x)} = x - (x^2+1)\arctan x + \widetilde{C} \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = -\frac{1}{2}\,\log[x - (x^2+1)\arctan x + \widetilde{C}]\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, si ha $0 = y(1) = -\frac{1}{2}\,\log(1 - 2\arctan 1 + \widetilde{C}) = -\frac{1}{2}\,\log(1 - \pi/2 + \widetilde{C})$, che fornisce $\widetilde{C} = \pi/2$. La soluzione cercata, pertanto, sarà $y(x) = -\frac{1}{2}\,\log[x - (x^2+1)\arctan x + \pi/2]$.

Esercizio 4

Tenendo conto che, per $x \to 0$, $\sin(x^2) \sim x^2$ e $\log(1+|x|) \sim |x|$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin(x^2)\log(1+|x|)}{x} + \mathrm{e}^x \right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^2|x|}{x} + 1 = 1 = f(0)\,,$$

che assicura la continuità di f nell'origine. Per quanto riguarda la derivabilità, utilizzando la definizione, ricaviamo

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x^2)\log(1+|x|)}{x} + \mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin(x^2)\log(1+|x|)}{x^2} + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \right] \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2|x|}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} |x| + 1 = 1\,, \end{aligned}$$

dove ricordiamo che il secondo limite della seconda riga è un ben noto limite notevole. Infine, l'equazione della retta tangente al grafico di f in $P = (0,1)$ è $y(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = x + 1$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.

ii) Effettuando il cambio di variabile $x = 1/y$, da cui $dy = -\frac{1}{x^2}\,dx$, l'integrale proposto si riscrive nella forma

$$\int_0^1 f\left(\frac{1}{y}\right) dy = -\int_{+\infty}^1 f(x)\,\frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\,dx\,.$$

Si tratta quindi dell'integrale improprio di una funzione positiva che va studiato solo in un intorno di $+\infty$, poiché in $[1,+\infty)$ la funzione $f(x)/x^2$ è continua. Dalle ipotesi si ricava che, per $x \to +\infty$,

$$\frac{f(x)}{x^2} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{che è impropriamente integrabile in quanto l'esponente è} > 1.$$

Pertanto, per il teorema del confronto asintotico integrale, l'affermazione è corretta.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$ e ricordando che $-i = \mathrm{e}^{-i\pi/2}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\mathrm{e}^{2a+2ib} = 3\mathrm{e}^{-i\pi/2} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^{2a} = 3, \\ 2b = -\pi/2 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = (\log 3)/2, \\ b = -\pi/4 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pertanto, l'equazione proposta ammette infinite soluzioni della forma $z = (\log 3)/2 - i(\pi/4 + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin al quinto ordine per la funzione $x \mapsto \sinh x$, con $x = \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$ e quello al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \cos x$, con $x = \sqrt{\frac{1}{3(n+5)}}$, ovvero

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\right) &= \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} + \frac{1}{3!(\sqrt[3]{n+5})^3} + \frac{1}{5!(\sqrt[3]{n+5})^5} + o\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right), \\ \cos\sqrt{\frac{1}{3(n+5)}} &= 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{3(n+5)}}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\sqrt{\frac{1}{3(n+5)}}\right)^4 + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

possiamo riscrivere il limite proposto nella forma

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\right) + \cos\sqrt{\frac{1}{3(n+5)}} - 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}}{(\mathrm{e}^{1/\sqrt[3]{n}} - 1)^5} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} + \frac{1}{3!(n+5)} + \frac{1}{5!(n+5)^{5/3}} + o\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right) + 1 - \frac{1}{2\cdot 3(n+5)} + \frac{1}{4![3(n+5)]^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}}{(\mathrm{e}^{1/\sqrt[3]{n}} - 1)^5} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{120(n+5)^{5/3}} + o\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right)}{(1/\sqrt[3]{n})^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/3}}{120n^{5/3}} = \frac{1}{120}, \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto anche del fatto che $\mathrm{e}^{1/\sqrt[3]{n}} - 1 \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Poiché $f(x) = x\arctan(x^2) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g(y) = \mathrm{e}^{-y/3} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita in un intorno del punto iniziale $x_0 = 0$. Poiché l'equazione $\mathrm{e}^{-y/3} = 0$ non ammette soluzioni, l'equazione differenziale non ammette soluzioni singolari; quindi, la soluzione del nostro problema andrà cercata tra quelle ottenute per separazione di variabili. Ricaviamo così

$$\begin{aligned} 3\mathrm{e}^{y/3} = \int \mathrm{e}^{y/3}\,dy &= \int x\arctan(x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{2}\int x^2\,\frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\log(1+x^4) + C. \end{aligned}$$

Invertendo la precedente equazione si ottiene

$$\mathrm{e}^{y(x)/3} = \frac{x^2}{6}\arctan(x^2) - \frac{1}{12}\log(1+x^4) + \widetilde{C} \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = 3\log\left[\frac{x^2}{6}\arctan(x^2) - \frac{1}{12}\log(1+x^4) + \widetilde{C}\right].$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, si ha $0 = y(0) = 3\log\widetilde{C}$, che fornisce $\widetilde{C} = 1$. La soluzione cercata, pertanto, sarà $y(x) = 3\log\left[\frac{x^2}{6}\arctan(x^2) - \frac{1}{12}\log(1+x^4) + 1\right]$.

Esercizio 4

Tenendo conto che, per $x \to 0$, $\mathrm{e}^{|x|} - 1 \sim |x|$ e $\log(1+x^2) \sim x^2$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left[\frac{(\mathrm{e}^{|x|} - 1)\log(1+x^2)}{x} + 2\sin x \right] = \lim_{x\to 0} \frac{|x|x^2}{x} + 2\lim_{x\to 0} \sin x = 0 = f(0)\,,$$

che assicura la continuità di f nell'origine. Per quanto riguarda la derivabilità, utilizzando la definizione, ricaviamo

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(\mathrm{e}^{|x|}-1)\log(1+x^2)}{x} + 2\sin x - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{(\mathrm{e}^{|x|} - 1)\log(1+x^2)}{x^2} + \frac{2\sin x}{x} \right] \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|x^2}{x^2} + 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} |x| + 2 = 2\,, \end{aligned}$$

dove ricordiamo che il secondo limite della seconda riga è un ben noto limite notevole. Infine, l'equazione della retta tangente al grafico di f in $P = (0,0)$ è $y(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.

ii) Effettuando il cambio di variabile $x = 1/y$, da cui $dy = -\frac{1}{x^2}\,dx$, l'integrale proposto si riscrive nella forma

$$\int_0^1 f\left(\frac{1}{y}\right) dy = -\int_{+\infty}^1 f(x)\,\frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\,dx\,.$$

Si tratta quindi dell'integrale improprio di una funzione positiva che va studiato solo in un intorno di $+\infty$, poiché in $[1,+\infty)$ la funzione $f(x)/x^2$ è continua. Dalle ipotesi si ricava che, per $x \to +\infty$,

$$\frac{f(x)}{x^2} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{che è impropriamente integrabile in quanto l'esponente è} > 1.$$

Pertanto, per il teorema del confronto asintotico integrale, l'affermazione è corretta.