SOLUZIONI COMPITO dello 08/07/2010
ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo che, riscrivendo $n = \mathrm{e}^{\log n}$, si ottiene

$$a_n := \frac{\left(4-\frac{1}{n}\right)^{\log n}}{n} = \frac{\left(4-\frac{1}{n}\right)^{\log n}}{\mathrm{e}^{\log n}} = \left(\frac{4-\frac{1}{n}}{\mathrm{e}}\right)^{\log n} \to +\infty\,,$$

poiché $\frac{4-\frac{1}{n}}{\mathrm{e}} \to 4/\mathrm{e} > 1$ e $\log n \to +\infty$.

Esercizio 2
L'equazione proposta si può riscrivere nella forma $y'(x) = -(x+\mathrm{e}^x)y^3(x)$, da cui si ottiene subito che essa è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, la cui soluzione singolare è data da $y(x) \equiv 0$. Pertanto, per $\alpha = 0$, l'unica soluzione del problema di Cauchy è proprio la soluzione singolare.
Per $\alpha \neq 0$, $y(x) \equiv 0$ non è soluzione del problema di Cauchy, quindi procediamo con la separazione delle variabili:

$$\frac{1}{2y^2} = -\int \frac{dy}{y^3} = \int (x+\mathrm{e}^x)\; dx = x^2/2 + \mathrm{e}^x + \tilde{C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{x^2+2\mathrm{e}^x + C} = y^2(x)$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{1}{2+C} = \alpha^2$, da cui $C = 1/\alpha^2 - 2$. Esplicitando, infine, $y(x)$ ricaviamo

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2\mathrm{e}^x+1/\alpha^2-2}} & \text{se } \alpha > 0, \\ 0 & \text{se } \alpha = 0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2\mathrm{e}^x+1/\alpha^2-2}} & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Esercizio 3
Osserviamo che la funzione $x \mapsto \frac{\log(1+x)-x}{x^2\tan\sqrt{x}}$ è continua sull'intervallo $(0,1]$, quindi è integrabile in senso proprio in ogni intervallo chiuso ivi contenuto. Pertanto, per stabilire se la funzione è impropriamente integrabile in $(0,1]$ è sufficiente analizzare il suo comportamento in un intorno destro di $x=0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$ e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \tan t$, con $t = \sqrt{x}$, otteniamo

$$\frac{\log(1+x)-x}{x^2\tan\sqrt{x}} \sim \frac{x - x^2/2 - x}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{x^2}{2x^{5/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{per } x \to 0^+\,.$$

Poiché la funzione $f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ è impropriamente integrabile in un intorno destro di $x=0$, dal criterio del confronto asintotico si ricava che anche l'integrale proposto esiste finito.

Esercizio 4
Poiché $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, per studiarne la monotonia, possiamo studiare il segno della sua derivata. A tale scopo, osserviamo che

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}(2x-1) + 2\mathrm{e}^{2x} + 8\mathrm{e}^x(1-x) - 8\mathrm{e}^x = 4x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-2) \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 0 \text{ oppure } x > \log 2, \\ = 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = \log 2, \\ < 0 & \text{se } 0 < x < \log 2. \end{cases}$$

Quindi, la funzione sarà crescente in $(-\infty,0)$ e in $(\log 2,+\infty)$, mentre sarà decrescente in $(0,\log 2)$. Il punto $x=0$ è punto di massimo locale (infatti $f(0)=7$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \sup f$), mentre $x = \log 2$ è punto di minimo locale (infatti $f(\log 2) = 12 - 8\log 2 > 0$, mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \inf f$).

Esercizio 5

Osserviamo che la funzione F, per $x \in (0,1]$, è prodotto e rapporto di funzioni continue e non nulle, quindi è certamente continua. Inoltre per $x \to 0^+$ si ha

$$F(x) = \frac{x[x^2 + x^3 + o(x^3)]}{x^3 + o(x^3)} \sim \frac{x^3}{x^3} \to 1 = F(0)\,.$$

Pertanto, F è continua anche nell'origine e, quindi, è continua in tutto l'intervallo $[0,1]$.

Esercizio 6

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate in $(0,0)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{3(r^3\cos^3\theta)\,(r\sin\theta) + 4(r^2\cos^2\theta)\,(r^2\sin^2\theta)}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^{3/2}} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4(3\cos^3\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta)}{[r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)]^{3/2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4(3\cos^3\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta)}{r^3} \\ &= \lim_{r\to 0^+} r(3\cos^3\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta) = 0\,,\end{aligned}$$

poiché la funzione $3\cos^3\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta$ si mantiene limitata.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che, riscrivendo $n = \mathrm{e}^{\log n}$, si ottiene

$$a_n := \frac{n}{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)^{\log n}} = \frac{\mathrm{e}^{\log n}}{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)^{\log n}} \left(\frac{\mathrm{e}}{2+\frac{1}{n^2}}\right)^{\log n} \to +\infty\,,$$

poiché $\frac{\mathrm{e}}{2+\frac{1}{n^2}} \to \mathrm{e}/2 > 1$ e $\log n \to +\infty$.

Esercizio 2

L'equazione proposta si può riscrivere nella forma $y'(x) = -(3x^2+\cos x)y^5(x)/4$, da cui si ottiene subito che essa è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, la cui soluzione particolare è data da $y(x) \equiv 0$. Pertanto, per $\alpha = 0$, l'unica soluzione del problema di Cauchy è proprio la soluzione singolare. Per $\alpha \neq 0$, $y(x) \equiv 0$ non è soluzione del problema di Cauchy, quindi procediamo con la separazione delle variabili:

$$\frac{1}{y^4} = -\int \frac{4}{y^5}\, dy = \int (3x^2+\cos x)\, dx = x^3+\sin x + C \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{x^3+\sin x + C} = y^4(x)$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{1}{C} = \alpha^4$, da cui $C = 1/\alpha^4$. Esplicitando, infine, $y(x)$ ricaviamo

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3+\sin x + 1/\alpha^4}} & \text{se } \alpha > 0, \\ 0 & \text{se } \alpha = 0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3+\sin x + 1/\alpha^4}} & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Esercizio 3

Osserviamo che la funzione $x \mapsto \frac{\sin(1/x)-1/x}{\sqrt{x}\log(1+1/x^2)}$ è continua sull'intervallo $[1,+\infty)$, quindi è integrabile in senso proprio in ogni intervallo chiuso ivi contenuto. Pertanto, per stabilire se la funzione è impropriamente integrabile in $[1,+\infty)$ è sufficiente analizzare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/x$, e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/x^2$, otteniamo

$$\frac{\sin(1/x)-1/x}{\sqrt{x}\log(1+1/x^2)} \sim \frac{1/x - 1/(6x^3) - 1/x}{\sqrt{x}(1/x^2)} = -\frac{1/(6x^3)}{1/x^{3/2}} = -\frac{1}{6x^{3/2}} \qquad \text{per } x \to +\infty\,.$$

Poiché la funzione $f(x) = -\frac{1}{6x^{3/2}}$ è impropriamente integrabile in un intorno di $+\infty$, dal criterio del confronto asintotico si ricava che anche l'integrale proposto esiste finito.

Esercizio 4

Poiché $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, per studiarne la monotonia, possiamo studiare il segno della sua derivata. A tale scopo, osserviamo che

$$f'(x) = 4\mathrm{e}^{4x}(1-4x) - 4\mathrm{e}^{4x} + 16\mathrm{e}^{2x}(2x-1) + 16\mathrm{e}^{2x} = 16x\mathrm{e}^{2x}(-\mathrm{e}^{2x}+2) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < 0 \text{ oppure } x > \log\sqrt{2}, \\ = 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = \log\sqrt{2}, \\ > 0 & \text{se } 0 < x < \log\sqrt{2}. \end{cases}$$

Quindi, la funzione sarà decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(\log\sqrt{2}, +\infty)$, mentre sarà crescente in $(0, \log\sqrt{2})$. Il punto $x = 0$ è punto di minimo locale (infatti $f(0) = -7$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty = \inf f$), mentre $x = \log\sqrt{2}$ è punto di massimo locale (infatti $f(\log\sqrt{2}) = -12 + 8\log 2 < 0$, mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \sup f$).

Esercizio 5

Osserviamo che la funzione F, per $x \in (0,1]$, è prodotto e rapporto di funzioni continue e non nulle, quindi è certamente continua. Inoltre per $x \to 0^+$ si ha

$$F(x) = \frac{2x^4 + x^6 + o(x^6)}{x[x^3 + o(x^3)]} \sim \frac{2x^4}{x^4} \to 2 = F(0)\,.$$

Pertanto, F è continua anche nell'origine e, quindi, è continua in tutto l'intervallo $[0,1]$.

Esercizio 6

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate in $(0,0)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} &= \lim_{r\to0^+} \frac{3(r^3\cos^3\theta)\,(r\sin\theta) + 4(r^2\cos^2\theta)\,(r^2\sin^2\theta)}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^{3/2}} \\ &= \lim_{r\to0^+} \frac{r^4(3\cos^3\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta)}{[r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)]^{3/2}} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^4(3\cos^3\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta)}{r^3} \\ &= \lim_{r\to0^+} r(3\cos^3\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta) = 0\,,\end{aligned}$$

poiché la funzione $3\cos^3\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta$ si mantiene limitata.