CALCOLO DIFF. e INT./A appello del 8 settembre 2008	cognome e nome (stampatello) firma

1. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la funzione

$$f_\alpha(x,y) = (\alpha-1)x^3 + \alpha x^2 + (y-1)^2$$

ammette almeno un punto di sella al di fuori del cerchio chiuso di centro $(0,1)$ e raggio $2/3$.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) - 15y(x) = \mathrm{e}^{-5x}\,.$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare le soluzioni della precedente equazione differenziale che soddisfano le condizioni

$$y(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad y'(0) = 0\,.$$

---

3. Stabilire per quali valori del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_{-2}^{2} \frac{|x^2-1|}{|x-\alpha|}\,dx$$

esiste finito.

---

4. Stabilire, al variare del parametro $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\tan\theta}+2}{n^{2\tan\theta}+1}\,.$$

---

5. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{e}^x - 1)^{1/\log x}\,.$$

---

6. Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ positive e convergenti, con $\{b_n\}$ non infinitesima, dimostrare che la successione $c_n = a_n \log b_n$ è convergente.
Mostrare con un controesempio che le precedenti condizioni non sono necessarie per la convergenza della successione $\{c_n\}$.

Tempo:
3 ore