SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

La funzione proposta è ovviamente continua su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; inoltre, in $x = 0$ si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \log_4(1 + |\alpha|) = f(0) \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1\,,$$

dove, nel calcolo del secondo limite, si è usato il fatto che, per $x \to 0^-$, $e^{1/x} \to 0$ e $e^{2x} - 1 \sim 2x$. Pertanto, la funzione proposta sarà continua per i valori di α che soddisfano l'equazione $\log_4(1 + |\alpha|) = 1$, ovvero $1+|\alpha| = 4$, che fornisce $\alpha = \pm 3$. Per tutti gli altri valori di α la funzione presenta una discontinuità di salto nel punto $x = 0$.

Esercizio 2

La funzione proposta è ovviamente definita in $D = (-1, +\infty)$, in quanto dobbiamo imporre le condizioni $\frac{1}{x+1} > 0$ e $x \neq -1$. Inoltre, le derivate prime e seconde di f sono date da:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x+1} + 3 = \frac{3x+2}{x+1}\,; \\ f''(x) &= \frac{3(x+1) - (3x+2)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ricava subito che $f'(x) > 0$ per $x > -2/3$ (cioè f è monotona crescente), $f'(x) < 0$ per $-1 < x < -2/3$ (cioè f è monotona decrescente), $f'(x) = 0$ per $x = -2/3$, che risulta essere punto di minimo assoluto, mentre $f''(x) > 0$ su tutto D, ovvero f è sempre convessa e non ci sono punti di flesso.

Esercizio 3

Per risolvere l'equazione proposta è utile esprimere il numero complesso z nella sua forma esponenziale, ovvero $z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$), da cui $|z| = r$ e $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Pertanto, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$2r^2e^{2i\theta}r = 4r^2e^{-2i\theta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad r^3e^{2i\theta} = 2r^2e^{-2i\theta}\,,$$

che ha come soluzioni $z_0 = 0$ oppure le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} r = 2 \\ 2\theta = -2\theta + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} r = 2 \\ \theta = 2k\pi/4 = k\pi/2\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Da quest'ultimo sistema otteniamo soluzioni distinte solo per $k = 0, 1, 2, 3$, ovvero $z_{k+1} = 2e^{ik\pi/2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$, da cui

$$z_1 = 2\,, \qquad z_2 = 2i\,, \qquad z_3 = -2\,, \qquad z_4 = -2i\,.$$

In totale l'equazione proposta ha 5 soluzioni distinte.

Domanda 1

La risposta *a*) è corretta, infatti l'ipotesi di monotonia garantisce l'esistenza del limite e si avrà $\lim_n a_n \geq 3$.
Le risposte *b*) e *c*) sono false, poiché scegliendo ad esempio la successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = 4 + 1/n \geq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, tutte le ipotesi sono soddisfatte, ma $\lim_n a_n = \inf\{a_n\} = 4 > 3$.
La risposta *d*) è ovviamente corretta.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1
La funzione proposta è ovviamente continua su tutto $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; inoltre, in $x = 1$ si ha:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2^\alpha = f(0) \qquad\qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3\frac{\sin(x-1)}{x-1} = 3\,,$$

dove, nel calcolo del secondo limite, si è usato il fatto che, per $x \to 1^+$, $e^{-1/(x-1)} \to 0$ e $\sin(x-1) \sim x-1$. Pertanto, la funzione proposta sarà continua per i valori di α che soddisfano l'equazione $2^\alpha = 3$, ovvero $\alpha = \log_2 3$. Per tutti gli altri valori di α la funzione presenta una discontinuità di salto nel punto $x = 1$.

Esercizio 2
La funzione proposta è ovviamente definita su tutto $\mathbb{R}$, in quanto non dobbiamo imporre alcuna condizione, poiché $x^2 + 1 > 0$ è sempre verificato. Inoltre, le derivate prime e seconde di f sono date da:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x-1}{x^2+1}\,;$$
$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x-1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2-x-1)}{(x^2+1)^2}\,.$$

Pertanto, si ricava subito che $f'(x) > 0$ per $x > 1/2$ (cioè f è monotona crescente), $f'(x) < 0$ per $x < 1/2$ (cioè f è monotona decrescente), $f'(x) = 0$ per $x = 1/2$, che risulta essere punto di minimo assoluto, mentre $f''(x) < 0$ per $x < (1-\sqrt{5})/2$ e $x > (1+\sqrt{5})/2$ (cioè f è concava), $f''(x) > 0$ per $(1-\sqrt{5})/2 < x < (1+\sqrt{5})/2$ (cioè f è convessa), $f'(x) = 0$ per $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$, che risultano essere punti di flesso.

Esercizio 3
Per risolvere l'equazione proposta è utile esprimere il numero complesso z nella sua forma esponenziale, ovvero $z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$), da cui $|z| = r$ e $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Pertanto, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$3re^{i\theta}r^2e^{-2i\theta} = 6r^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r^3e^{-i\theta} = 2r^2\,,$$

che ha come soluzioni $z_0 = 0$ oppure le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} r = 2 \\ -\theta = 0 + 2\tilde{k}\pi\,, \quad \tilde{k} \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} r = 2 \\ \theta = -2\tilde{k}\pi = 2k\pi\,, \quad \tilde{k}\,, k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Da quest'ultimo sistema otteniamo soluzioni distinte solo per $k = 1$, ovvero $z_1 = 2e^{2i\pi} = 2$. In totale l'equazione proposta ha 2 soluzioni distinte.

Domanda 1
Le risposte *a*) e *b*) sono false, poiché scegliendo ad esempio la successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = 4 - 1/n \leq 5$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, tutte le ipotesi sono soddisfatte, ma $\lim_n a_n = \sup\{a_n\} = 4 < 5$.
La risposta *c*) è corretta, infatti l'ipotesi di monotonia garantisce l'esistenza del limite e si avrà $\lim_n a_n \leq 5$.
La risposta *d*) è ovviamente corretta.