SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Poiché f_α è un polinomio, per determinare gli eventuali punti di sella possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Innanzitutto cerchiamo i punti stazionari, annullando il gradiente:

$$\begin{cases} \partial_x f_\alpha(x,y) = 3(\alpha-1)x^2 + 2\alpha x = 0 \\ \partial_y f_\alpha(x,y) = 2(y-1) = 0\,. \end{cases}$$

Dal precedente sistema si ricava che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il punto $P_0 = (0,1)$ è stazionario; inoltre, se $\alpha \neq 1$, si trova anche un secondo punto stazionario $P_1 = \left(-\frac{2\alpha}{3(\alpha-1)}, 1\right)$. Passando allo studio della matrice Hessiana, si ottiene

$$Hf_\alpha(P_0) = \begin{vmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\alpha \qquad \text{e per } \alpha \neq 1 \qquad Hf_\alpha(P_1) = \begin{vmatrix} -4\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8\alpha\,.$$

Pertanto, per $\alpha = 1$, la funzione f_α ha un unico punto stazionario P_0, che risulta essere punto di minimo e quindi non interessa ai fini dell'esercizio proposto. Per $\alpha \neq 1$, la funzione f_α ha due punti stazionari, ma un unico punto di sella che corrisponde a P_0, per $\alpha < 0$, o a P_1, per $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

In particolare, se $\alpha < 0$, il punto di sella $P_0 = (0,1)$ non giace mai al di fuori del cerchio chiuso di centro $(0,1)$ e raggio $2/3$, poiché corrisponde al centro stesso del cerchio, mentre per $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, tenendo conto che l'insieme da considerare è definito da $C^c := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y-1)^2 > 4/9\}$, si avrà che $P_1 = \left(-\frac{2\alpha}{3(\alpha-1)}, 1\right) \in C^c$ se

$$\frac{4\alpha^2}{9(\alpha-1)^2} > \frac{4}{9} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha^2 > (\alpha-1)^2, \quad \alpha \neq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1/2,\ \alpha \neq 1\,.$$

Concludendo, la funzione proposta ammette un unico punto di sella $P_1 = \left(-\frac{2\alpha}{3(\alpha-1)}, 1\right)$, che giace al di fuori del cerchio chiuso di centro $(0,1)$ e raggio $2/3$ se e solo se $\alpha \in (1/2,1) \cup (1,+\infty)$.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 3, -5$. Pertanto, la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{-5x}$. Poiché la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-5x}$ è soluzione dell'equazione omogenea, applicando il metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-5x}$. Calcolando y_p' e y_p'' e sostituendo nell'equazione completa, si ottiene

$$-10A\mathrm{e}^{-5x} + 25Ax\mathrm{e}^{-5x} + 2A\mathrm{e}^{-5x} - 10Ax\mathrm{e}^{-5x} - 15Ax\mathrm{e}^{-5x} = \mathrm{e}^{-5x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = -1/8\,,$$

che fornisce $y_p(x) = -\frac{1}{8}\, x\mathrm{e}^{-5x}$. Quindi l'integrale generale sarà dato da

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{-5x} - \frac{1}{8}\, x\mathrm{e}^{-5x}\,.$$

2. Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$, si ottiene

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = -C_1\,, \\ 3C_1 - 5C_2 - 1/8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = \dfrac{1}{64}\,. \end{cases}$$

Quindi la soluzione cercata è data da $y(x) = \frac{1}{64}\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{64}\mathrm{e}^{-5x} - \frac{1}{8}\, x\mathrm{e}^{-5x}$.

Esercizio 3
Osserviamo, innanzitutto, che l'unico punto critico per la funzione integranda è $x = \alpha$, dove ci potrebbe essere un asintoto verticale. D'altra parte, se $\alpha < -2$ e $\alpha > 2$, il punto $x = \alpha$ non appartiene all'intervallo considerato, pertanto la funzione proposta è continua in $[-2, 2]$ e l'integrale esiste come usuale integrale di Riemann. Invece, per $\alpha \in [-2, 2]$, $\alpha \neq \pm 1$, si verifica facilmente, per confronto, che l'integrale diverge. Infine, per $\alpha = \pm 1$, la funzione è prolungabile con continuità in $x = \alpha$ e quindi l'integrale proposto esiste finito.

Esercizio 4
Osserviamo innanzitutto che, per ogni $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, la serie proposta è a termini positivi. Ponendo

$$a_n(\theta) = \frac{n^{\tan\theta} + 2}{n^{2\tan\theta} + 1}\,,$$

si ottiene che, per $\theta \in (0, \pi/2)$, $\tan\theta > 0$ e quindi

$$a_n(\theta) \sim \frac{n^{\tan\theta}}{n^{2\tan\theta}} = \frac{1}{n^{\tan\theta}}\,;$$

pertanto, la serie converge per $\tan\theta > 1$, ovvero $\theta \in (\pi/4, \pi/2)$, mentre diverge per $\theta \in (0, \pi/4]$. Se invece $\theta \in (-\pi/2, 0)$, $\tan\theta < 0$ e $a_n(\theta) \to 2$ per $n \to +\infty$, quindi la serie diverge, poiché non è soddisfatta la condizione necessaria. Analogamente, la serie diverge per $\theta = 0$, poiché in tal caso $\tan\theta = 0$ e $a_n(\theta) \equiv 3/2 \not\to 0$.

Esercizio 5
Osserviamo innanzitutto che ci troviamo davanti ad un caso di indecisione del tipo 0^0. Passando alla forma esponenziale, il limite proposto si riscrive come

$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{e}^x - 1)^{1/\log x} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{\log(\mathrm{e}^x - 1)}{\log x}\right)\,.$$

Studiamo pertanto il comportamento dell'esponente; applicando il Teorema di de L'Hospital otteniamo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\mathrm{e}^x - 1)}{\log x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1\,,$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzato il limite notevole $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \to 1$ per $x \to 0$. Pertanto, il limite proposto esiste finito e vale

$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{e}^x - 1)^{1/\log x} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\mathrm{e}^x - 1)}{\log x}} = \mathrm{e}\,.$$

Esercizio 6
Poiché $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono convergenti, positive e $\{b_n\}$ non è infinitesima, possiamo assumere che $a_n \to a \in [0, +\infty)$ e $b_n \to b \in (0, +\infty)$. Quindi, per definizione di successione convergente e tenendo conto della continuità della funzione $x \to \log x$, si ricava che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |\log b_n - \log b| < \varepsilon \qquad\qquad \forall n \geq n_0\,.$$

Pertanto, usando la disuguaglianza triangolare, si ottiene che, per ogni $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
|a_n \log b_n - a \log b| &= |a_n \log b_n - a_n \log b + a_n \log b - a \log b| \\
&\leq |a_n(\log b_n - \log b)| + |(a_n - a)\log b| \\
&= |a_n(\log b_n - \log b) - a(\log b_n - \log b) + a(\log b_n - \log b)| + |(a_n - a)\log b| \\
&\leq |(a_n - a)(\log b_n - \log b)| + |a(\log b_n - \log b)| + |(a_n - a)\log b| \\
&< \varepsilon^2 + a\varepsilon + \varepsilon|\log b|\,.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε, si ottiene che $c_n = a_n \log b_n \to a \log b$, cioè è una successione convergente.

Prendendo, ad esempio, $a_n = 1/n$ e $b_n = n$, le condizioni precedenti non sono soddisfatte (in particolare $b_n \to +\infty$, quindi non è convergente) ma, tenendo conto degli ordini di infinito, si ottiene che $c_n \to 0$, cioè essa è ugualmente una successione convergente.