SOLUZIONI COMPITO del 8/09/2011
ANALISI 1 - BIAR/BSIR 12 CFU
ANALISI 1 (I MODULO e/o II MODULO)
INFORMATICA + AUTOMATICA 5 o 5+5 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Si ha $\{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+1) < 0\} = (-1, 2)$. Quindi $\{|x| : x \in (-1, 2)\} = [0, 2)$. Dunque il minimo è 0, il massimo non esiste ed il sup è 2.

Esercizio 2
Sia $z = x+iy$. Allora l'equazione è equivalente a $(1+i)(x-iy)+(4+2i)(x+iy) = 6$, quindi $5x-y+(3y+3x)i = 6$, da cui $y = -x$, $x = 1$. Pertanto l'unica soluzione è $z = 1 - i$.

Esercizio 3
Si ha $(1 + x)^4 = 1 + 4x + o(x)$. Per le proprietà dei logaritmi, la funzione nel limite si può riscrivere

$$\frac{\ln\left(\frac{\cos 4x+e^{4x}}{2}\right)}{4x+o(x)} = \frac{\ln\left(1+\frac{\cos 4x+e^{4x}-2}{2}\right)}{4x+o(x)}.$$

Usando il limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\cos 4x+e^{4x}-2}{2}\right)}{4x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos 4x+e^{4x}-2}{2}}{4x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{8x} + \lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{8x} = 4/8 = 1/2.$$

Domanda 1
Innanzitutto osserviamo che, poiché $f \in \mathcal{C}^7(\mathbb{R})$, essa ammette tutte le derivate fino all'ordine 7 in ciascun punto di $\mathbb{R}$. Inoltre, f ammette sviluppo di Taylor con centro in $x_0 = 3$ fino all'ordine 7, dato dalla formula generale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{7} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n + o\big((x-3)^7\big).$$

Pertanto, si avrà che $\frac{f'''(3)}{3!}$ sarà il coefficiente del termine di terzo grado, mentre $\frac{f^{(vii)}(3)}{7!}$ sarà il coefficiente del termine di settimo grado. Poiché nel nostro caso si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{4^k}{2k+1}(x-3)^{3k+1} + o((x-3)^7);$$

per l'unicità dello sviluppo, otterremo

$\frac{f'''(3)}{3!} = 0$ poiché nello sviluppo esplicito il termine $(x-3)^3$ non compare, cioè il suo coefficiente è nullo;

$\frac{f^{(vii)}(3)}{7!} = \frac{16}{5}$ poiché nello sviluppo esplicito il termine $(x-3)^7$ si ottiene per $k = 2$ ed ha come coefficiente $\frac{4^2}{2\cdot 2+1}$.

Quindi $f^{(vii)}(3) = 7!\frac{16}{5} = 16128$.

Esercizio 4

Calcolando le derivate parziali, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2x + 2y - 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x^2 + 2x - 2x - 3 = 0 \\ y = -x \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

da cui si ricava che i punti critici sono $(1,-1)$, $(-1,1)$. La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e sostituendo i punti si ottiene

$$Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \implies \text{punto di minimo locale}$$

$$Hf(-1,1) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \implies \text{punto di sella}$$

Esercizio 5

Passando in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\, d\theta\, d\rho = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^3 [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right)\frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{6}.$$

Esercizio 6

L'equazione proposta è un'equazione differenziale a variabili separabili, che ha come unico integrale singolare la funzione $y(t) \equiv 0$; quindi per $\alpha = 0$ la soluzione del problema di Cauchy sarà proprio l'integrale singolare $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Per $\alpha \neq 0$, applicando la formula di risoluzione si ha

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{6(y^2)^{\frac{1}{3}}} dy = \int_0^t \frac{\cos s}{1 + 2\sin s} ds.$$

Quindi

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{6(y^2)^{\frac{1}{3}}} dy = [\frac{1}{2} y^{\frac{1}{3}}]_\alpha^{y(t)} = \frac{1}{2}[y(t)^{\frac{1}{3}} - \alpha^{\frac{1}{3}}],$$

$$\int_0^t \frac{\cos s}{1+2\sin s} ds = \frac{1}{2}[\ln|1+2\sin s|]_0^t = \frac{1}{2}\ln|1+2\sin t|.$$

Sostituendo nella formula di risoluzione si ottiene

$$y(t) = \left(\ln|1 + 2\sin t| + \alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

Domanda 2

a) è falsa, ad esempio $y(t) = e^{-t}$ è soluzione di $y' = -y$.
b) è falsa, ad esempio $y(t) = -e^t$ è soluzione di $y' = y$.
c) è vera perché se y è una soluzione, allora $y'(t) = y(t)^2 + 1 > 0$ e quindi $y(t)$ è strettamente crescente.
d) è falsa, ad esempio $y(t) = \tanh(t)$ è soluzione di $y' = y^2 - 1$.

TEMA B

Esercizio 1

Si ha $\{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x+4) < 0\} = (-4, 1)$. Quindi $\{|x| : x \in (-4,1)\} = [0, 4)$. Dunque il minimo è 0, il massimo non esiste ed il sup è 4.

Esercizio 2

Sia $z = x+iy$. Allora l'equazione è equivalente a $(1-i)(x-iy)+(4-2i)(x+iy) = 6$, quindi $5x+y+(3y-3x)i = 6$, da cui $y = x$, $x = 1$. Pertanto l'unica soluzione è $z = 1 + i$.

Esercizio 3

Si ha $(1 + x)^4 = 1 + 4x + o(x)$. Per le proprietaà dei logaritmi, la funzione nel limite si può riscrivere

$$\frac{\ln\left(\frac{\cos x+e^{6x}}{2}\right)}{4x+o(x)} = \frac{\ln\left(1+\frac{\cos x+e^{6x}-2}{2}\right)}{4x+o(x)}.$$

Usando il limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\cos x+e^{6x}-2}{2}\right)}{4x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x+e^{6x}-2}{2}}{4x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{8x} + \lim_{x\to 0} \frac{e^{6x}-1}{8x} = 6/8 = 3/4.$$

Domanda 1

Innanzitutto osserviamo che, poiché $f \in \mathcal{C}^7(\mathbb{R})$, essa ammette tutte le derivate fino all'ordine 7 in ciascun punto di $\mathbb{R}$. Inoltre, f ammette sviluppo di Taylor con centro in $x_0 = 3$ fino all'ordine 7, dato dalla formula generale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{7} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n + o\big((x-3)^7\big).$$

Pertanto, si avrà che $\frac{f'''(3)}{3!}$ sarà il coefficiente del termine di terzo grado, mentre $\frac{f^{(vii)}(3)}{7!}$ sarà il coefficiente del termine di settimo grado. Poiché nel nostro caso si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{4^k}{2k+1}(x-3)^{3k+1} + o((x-3)^7);$$

per l'unicità dello sviluppo, otterremo

$\frac{f'''(3)}{3!} = 0$ poiché nello sviluppo esplicito il termine $(x-3)^3$ non compare, cioè il suo coefficiente è nullo;

$\frac{f^{(vii)}(3)}{7!} = \frac{16}{5}$ poiché nello sviluppo esplicito il termine $(x-3)^7$ si ottiene per $k = 2$ ed ha come coefficiente $\frac{4^2}{2\cdot 2+1}$.

Quindi $f^{(vii)}(3) = 7!\frac{16}{5} = 16128$.

Esercizio 4
Calcolando le derivate parziali, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 2y + 2x - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ 3y^2 + 2y - 2y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che i punti critici sono $(-1,1)$, $(1,-1)$. La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6y+2 \end{bmatrix}$$

e sostituendo i punti si ottiene

$$Hf(-1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \implies \text{punto di minimo locale}$$

$$Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \implies \text{punto di sella}$$

Esercizio 5
Passando in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene

$$\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 d\theta d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 [\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right)\frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{16}.$$

Esercizio 6
L'equazione proposta è un'equazione differenziale a variabili separabili, che ha come unico integrale singolare la funzione $y(t) \equiv 0$; quindi per $\alpha = 0$ la soluzione del problema di Cauchy sarà proprio l'integrale singolare $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Per $\alpha \neq 0$, applicando la formula di risoluzione si ha

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{6(y^4)^{\frac{1}{5}}} dy = \int_0^t \frac{\sin s}{1 + 2\cos s} ds.$$

Quindi

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{6(y^4)^{\frac{1}{5}}} dy = \left[\frac{5}{6} y^{\frac{1}{5}}\right]_\alpha^{y(t)} = \frac{5}{6}\left[y(t)^{\frac{1}{5}} - \alpha^{\frac{1}{5}}\right],$$

$$\int_0^t \frac{\sin s}{1+2\cos s} ds = -\frac{1}{2}\left[\ln|1+2\cos s|\right]_0^t = -\frac{1}{2}\ln|1+2\cos t| + \frac{1}{2}\ln 3.$$

Sostituendo nella formula di risoluzione si ottiene

$$y(t) = \left(-\frac{3}{5}\ln|1+2\cos t| + \frac{3}{5}\ln 3 + \alpha^{\frac{1}{5}}\right)^5$$

Domanda 2
a) è falsa, ad esempio $y(t) = e^{-t}$ è soluzione di $y' = -y$.
b) è falsa, ad esempio $y(t) = -e^t$ è soluzione di $y' = y$.
c) è vera perché se y è una soluzione, allora $y'(t) = y(t)^2 + 1 > 0$ e quindi $y(t)$ è strettamente crescente.
d) è falsa, ad esempio $y(t) = \tanh(t)$ è soluzione di $y' = y^2 - 1$.