SOLUZIONI COMPITO DI AUTOVALUTAZIONE

Esercizio 1.

- Osserviamo che $a_n(1) = n^2 \arctan \frac{3}{n^2}$, pertanto, ricordando che $\arctan \frac{3}{n^2} \sim \frac{3}{n^2}$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \arctan \frac{3}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n^2} = 3 \ .$$

- Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha invece

$$a_n(\alpha) = n^{2\alpha} \arctan \frac{3}{n^{\alpha+1}} \sim \begin{cases} \dfrac{3n^{2\alpha}}{n^{\alpha+1}} = \dfrac{3}{n^{1-\alpha}} & \text{se } \alpha > -1 \ \longrightarrow \ \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \ , \\ 3 & \text{se } \alpha = 1 \ , \\ 0 & \text{se } -1 < \alpha < 1 \ , \end{cases} \\ \dfrac{\arctan 3}{n^2} & \text{se } \alpha = -1 \ \longrightarrow \ 0 \ , \\ \dfrac{\pi}{2n^{2|\alpha|}} & \text{se } \alpha < -1 \ \longrightarrow \ 0 \ . \end{cases}$$

Concludendo, $a_n(\alpha) \to 0$, per $\alpha < 1$; $a_n(1) \to 3$ e $a_n(\alpha) \to +\infty$, per $\alpha > 1$.

Esercizio 2.

- Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2 = f(0) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x}\, 2 = 2$$

si ottiene subito che f è continua in $x = 0$.

- Ovviamente, per $x \neq 0$ e $x \neq 1$, la funzione proposta è anche derivabile, in quanto composizione di funzioni derivabili, ed inoltre si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x > 1 \ , \\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } 0 < x < 1 \ , \\ \dfrac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{x^2} & \text{se } x < 0 \ . \end{cases}$$

Infine

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$$

pertanto $x = 1$ è punto di cuspide, mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x(1+2x) - (1+2x+2x^2) + 1}{x^2} = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

pertanto $x = 0$ è punto angoloso.

Esercizio 3.

- Poiché

$$\begin{aligned} z^3 + 2z^2 + 5z = z(z^2+2z+5) = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad z = 0 \ \text{ oppure } \ z^2 + 2z + 5 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad z = 0 \ \text{ e } \ z = -1 + \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i \end{aligned}$$

si ottiene che l'equazione proposta ha tre soluzioni: $z = 0$, $z = -1-2i$, $z = -1+2i$.

- Per risolvere la seconda equazione, poniamo $z = a + ib$, da cui

$$e^{\frac{1}{z+1}} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exp\left(\frac{a+1}{(a+1)^2+b^2}\right) \exp\left(-\frac{ib}{(a+1)^2+b^2}\right) = 1 \ .$$

Pertanto si ottiene il sistema

$$\begin{cases} e^{\frac{a+1}{(a+1)^2+b^2}} = 1 \\ -\dfrac{b}{(a+1)^2+b^2} = 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} a+1=0 \\ -\dfrac{1}{b} = 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=-1 \\ b = -\dfrac{1}{2k\pi} \quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \ . \end{cases}$$

Le soluzioni cercate sono un'infinità numerabile e sono date da $z = -1 - \frac{i}{2k\pi}$, con $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Domanda 1.

- Per la definizione di successione monotona strettamente crescente, vedere il libro di testo. Un esempio di successione monotona strettamente crescente è dato $a_n = n$, $n \in I\!N$.
- Per l'enunciato del teorema di regolarità delle successioni monotone, vedere il libro di testo.

Domanda 2.

- Per l'enunciato del criterio del rapporto, vedere il libro di testo.
- Consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ .$$

In entrambi i casi si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \ ,$$

ma, nel primo caso, la serie diverge a $+\infty$, mentre, nel secondo caso, la serie converge.