SOLUZIONI COMPITO dell'8/11/2019
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy$, da cui $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\overline{z}|$ e $Im(z) = y$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$2\sqrt{x^2 + y^2} - 4\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{5}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{5}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{5}y = 2\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Osserviamo che l'ultima equazione ammette eventuali soluzioni solo per $y \geq 0$, quindi, imponendo tale condizione ed elevando al quadrato ambo i membri, otteniamo

$$5y^2 = 4x^2 + 4y^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad y = 2|x|\,.$$

Pertanto, l'equazione proposta ha infinite soluzioni $z = x + 2i|x|$ che, nel piano complesso, si rappresentano come i punti del grafico della funzione $y = 2|x|$.

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Inoltre, ricordando che, per $t \to 0$, $\sin t \sim t$, con $t = \log(1 + 1/n^3) \to 0$, e $\log(1 + t) \sim t$, con $t = 1/n^3 \to 0$, e tenendo conto che $n^\alpha \to +\infty$ per $\alpha > 0$, $n^\alpha \to 0$ per $\alpha < 0$ e $n^0 = 1$, ricaviamo

$$\sin\left[\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\right] \sim \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^3} \qquad \text{e} \qquad (2n^\alpha + 1) \sim \begin{cases} 2n^\alpha & \text{per } \alpha > 0; \\ 3 & \text{per } \alpha = 0; \\ 1 & \text{per } \alpha < 0. \end{cases}$$

Pertanto, indicato con a_n il termine generale della serie proposta, avremo

$$a_n \sim \begin{cases} 2n^\alpha \dfrac{1}{n^3} = \dfrac{2}{n^{3-\alpha}} & \text{per } \alpha > 0; \\[2mm] 3\,\dfrac{1}{n^3} = \dfrac{3}{n^3} & \text{per } \alpha = 0; \\[2mm] \dfrac{1}{n^3} & \text{per } \alpha < 0. \end{cases}$$

Da ciò si ricava che, per $\alpha \leq 0$, la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$, mentre, per $\alpha > 0$, la serie converge se e solo se $3 - \alpha > 1$, cioè per $0 < \alpha < 2$ (sempre per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1).
In conclusione, la serie proposta convergerà se e solo se $\alpha < 2$.

Esercizio 3

Poiché l'arcocoseno è definito solo quando l'argomento è compreso tra -1 e 1 e il logaritmo è definito solo quando l'argomento è strettamente positivo, le condizioni da imporre sono

$$\begin{cases} 1 + 2x > 0\,, \\ -1 \leq \log_2(1 + 2x) - 1 \leq 1\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x > -1/2\,, \\ 0 \leq \log_2(1 + 2x) \leq 2\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} x > -1/2\,, \\ 1 \leq 1 + 2x \leq 4\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x > -1/2\,, \\ 0 \leq x \leq 3/2\,. \end{cases}$$

Quindi, il campo d'esistenza è dato dall'intervallo chiuso $[0, 3/2]$. Infine, poiché nel suo insieme di definizione la funzione arcocoseno è sempre non negativa, avremo che la funzione proposta è ≥ 0 per ogni $x \in [0, 3/2]$.

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea.

Per $\alpha = 0$, integrando due volte si ottiene subito

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{2} + C_1 x + C_2 \,.$$

Invece, per $\alpha \neq 0$, l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - \alpha = 0$, che ha come soluzioni

$$\begin{aligned} &\lambda = \pm\sqrt{\alpha}\,, && \text{se } \alpha > 0; \\ &\lambda = \pm i\sqrt{-\alpha} = \pm i\sqrt{|\alpha|} && \text{se } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà

$$y_0(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}\,, & \text{se } \alpha > 0; \\ \\ C_1 \cos(\sqrt{|\alpha|}x) + C_2 \sin(\sqrt{|\alpha|}x) & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Utilizzando, inoltre, il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = Ae^{2x}$, se $\alpha \neq 4$, e $y_p(x) = Axe^{2x}$, se $\alpha = 4$. Pertanto, per $\alpha \neq 4$ ricaviamo $y_p''(x) = 4Ae^{2x}$, da cui, inserendo nell'equazione completa, si ottiene $4Ae^{2x} - \alpha(Ae^{2x}) = 2e^{2x}$, ovvero $A = 2/(4-\alpha)$. Invece, per $\alpha = 4$, ricaviamo $y_p'(x) = Ae^{2x}(1+2x)$ e $y_p''(x) = Ae^{2x}(4+4x)$, da cui, inserendo nell'equazione completa, si ottiene $Ae^{2x}(4+4x) - 4Axe^{2x} = 2e^{2x}$, ovvero $A = 1/2$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1 x + C_2 + \dfrac{e^{2x}}{2}, & \text{per } \alpha = 0; \\ C_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}x} + \dfrac{2}{4-\alpha}\, e^{2x} & \text{se } \alpha > 0 \text{ e } \alpha \neq 4; \\ C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \dfrac{1}{2}\, x e^{2x} & \text{se } \alpha = 4; \\ C_1 \cos(\sqrt{|\alpha|}x) + C_2 \sin(\sqrt{|\alpha|}x) + \dfrac{2}{4-\alpha}\, e^{2x} & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione, si veda il libro di testo.

ii) Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto e^x$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, dal teorema di derivazione della funzione composta e dal Teorema di Torricelli si ricava che $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Pertanto, per stabilire se F è convessa, calcoliamo la sua derivata seconda, che è data da

$$F'(x) = f(e^x)\,, \qquad F''(x) = e^x f'(e^x)\,.$$

Tenendo conto che f è strettamente crescente, ricaviamo che $f'(s) \geq 0$, per ogni $s \in \mathbb{R}$; quindi, $f'(e^x) \geq 0$. Inoltre, la funzione $x \mapsto e^x$ è sempre strettamente positiva. Pertanto, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F''(x) \geq 0$ e, di conseguenza, F è convessa su $\mathbb{R}$.