SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per il $\sin t$, con $t = 2x^{4/3}$, e quello al primo ordine per il $\log(1+t)$, con $t = x^3$, otteniamo

$$\sin(2x^{4/3}) = 2x^{4/3} - \frac{8}{3!}x^4 + o(x^4)\,, \qquad \log(1+x^3) = x^3 + o(x^3)\,,$$

e quindi il limite proposto diviene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x}[\sin(2x^{4/3}) - 2x^{4/3}]}{\log(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x}(2x^{4/3} - \frac{4}{3}x^4 - 2x^{4/3})}{x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{4\mathrm{e}^{3x}x^4}{3x^3} = 0\,.$$

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come integrale singolare la funzione $y(x) = -1$. Per $y \neq -1$, il suo integrale generale si ottiene come segue:

$$\int \frac{1}{(y+1)}\,dy = \int (\mathrm{e}^x - x)\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \log|y(x)+1| = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} + C\,.$$

1. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, si ricava $C = -1$, quindi la soluzione cercata sarà

   $$|y(x)+1| = \exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - 1)$$

   da cui, tenendo conto del segno di $y(x)+1$, si ha

   $$y(x) = \exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - 1) - 1\,.$$

2. Per $\alpha = -1$, l'integrale singolare è soluzione del problema di Cauchy assegnato; pertanto, la soluzione richiesta è $y(x) = -1$.
3. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1 - \mathrm{e}$, si ricava $C = 0$, quindi la soluzione cercata sarà

   $$|y(x)+1| = \exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2})$$

   da cui, tenendo conto del segno di $y(x)+1$, si ha

   $$y(x) = -\exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}) - 1\,.$$

Alternativamente, l'equazione puó essere vista come una lineare del primo ordine. Applicando la formula risolutiva si ottiene l'integrale generale nella forma: $y(x) = C\exp(\mathrm{e}^x - x^2/2) - 1$. Ponendo $y(0) = \alpha$, si ricava $C = \frac{1+\alpha}{\mathrm{e}}$ e per $\alpha = 0, -1, -1-\mathrm{e}$ si ritrovano le soluzioni viste sopra.

Esercizio 3

Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0, +\infty)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ otteniamo

$$\text{per } x \to +\infty \quad f(x) \le \frac{2}{x^{3/2}\log(1+x)} \quad \text{che è impropriamente integrabile;}$$

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{x^2/2}{x^{3/2}\cdot x} = \frac{1}{2x^{1/2}} \quad \text{che è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta risulta impropriamente integrabile in $(0, +\infty)$.

Esercizio 4
Il campo di esistenza di f è fornito dalle condizioni

$$\begin{aligned} &1+2x>0 \quad &&\Longleftrightarrow \quad x>-1/2\,, \\ &-1\le \log(1+2x)\le 1 \quad &&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-1}\le 1+2x\le \mathrm{e} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^{-1}-1}{2}\le x\le \frac{\mathrm{e}-1}{2}\,, \\ &x^2+y^2-1>0 \quad &&\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2>1\,. \end{aligned}$$

Pertanto, esso è costituito dalla regione di piano esterna alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 e compresa fra le due rette verticali di equazione $x=(\mathrm{e}^{-1}-1)/2$ e $x=(\mathrm{e}-1)/2$, rispettivamente. In particolare, in tale regione, i punti della circonferenza NON appartengono al campo di esistenza, mentre i punti delle due rette vi appartengono.

Esercizio 5
L'insieme di definizione della funzione assegnata f è dato da $D=(-\infty,1/2)\cup(1/2,+\infty)$ e $f\in\mathcal{C}^\infty(D)$. Per quanto riguarda i limiti alla frontiera si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\mathrm{e}^x}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x}=-\infty\,; \\ &\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\mathrm{e}^x}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2x}=+\infty\,; \\ &\lim_{x\to1/2^\pm}\frac{x^2+\mathrm{e}^x}{2x-1}=\pm\infty\,. \end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $x=1/2$ è asintoto verticale per f, per $x\to1/2^\pm$, mentre non ci sono asintoti orizzontali. Inoltre, poiché per $x\to-\infty$ la funzione è un infinito di ordine 1, controlliamo se essa ha un asintoto obliquo:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\mathrm{e}^x}{2x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\,; \\ &\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2\mathrm{e}^x-2x^2+x}{2(2x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $y=x/2+1/4$ è asintoto obliquo per f, per $x\to-\infty$.

Esercizio 6
Le funzioni di cui ai punti A) e B) non presentano cuspidi, mentre la funzione in C) presenta una cuspide in $x=0$ e quella in D) presenta una cuspide in $x=-1$. Quindi la risposta corretta è C).

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per il $\sinh t$, con $t = x^3$, e quello al primo ordine per il $\log(1+t)$, con $t = x^9$, otteniamo

$$\sinh(x^3) = x^3 + \frac{1}{3!}x^9 + o(x^9)\,, \qquad \log(1+x^9) = x^9 + o(x^9)\,,$$

e quindi il limite proposto diviene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x(\sinh x^3 - x^3)}{\log(1+x^9)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(x^3 + \frac{1}{6}x^9 - x^3)}{x^9} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x x^9}{6x^9} = \frac{1}{6}\,.$$

Esercizio 2
L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come integrale singolare la funzione $y(x) = 1$. Per $y \neq 1$, il suo integrale generale si ottiene come segue:

$$\int \frac{1}{(y-1)}\,dy = \int (e^{2x} + x^2)\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \log|y(x) - 1| = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C\,.$$

1. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1 + \sqrt{e}$, si ricava $C = 0$, quindi la soluzione cercata sarà

   $$|y(x) - 1| = \exp(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3})$$

   da cui, tenendo conto del segno di $y(x) - 1$, si ha

   $$y(x) = \exp(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3}) + 1\,.$$

2. Per $\alpha = 1$, l'integrale singolare è soluzione del problema di Cauchy assegnato; pertanto, la soluzione richiesta è $y(x) = 1$.
3. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, si ricava $C = -1/2$, quindi la soluzione cercata sarà

   $$|y(x) - 1| = \exp(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2})$$

   da cui, tenendo conto del segno di $y(x) - 1$, si ha

   $$y(x) = -\exp(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}) + 1\,.$$

Alternativamente, l'equazione puó essere vista come una lineare del primo ordine. Applicando la formula risolutiva si ottiene l'integrale generale nella forma: $y(x) = C\exp(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^3}{3}) + 1$. Ponendo $y(0) = \alpha$, si ricava $C = \frac{\alpha-1}{\sqrt{e}}$ e per $\alpha = 1 + \sqrt{e}, 1, 0$ si ritrovano le soluzioni viste sopra.

Esercizio 3
Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0, +\infty)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ otteniamo

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \leq \dfrac{1}{x^2\log(1+x^2)}$ che è impropriamente integrabile;

per $x \to 0^+$ $\quad f(x) \sim \dfrac{x^2}{x^2 \cdot x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ che non è impropriamente integrabile.

Pertanto la funzione proposta non è impropriamente integrabile in $(0, +\infty)$.

Esercizio 4
Il campo di esistenza di f è fornito dalle condizioni

$$
\begin{aligned}
&1-3x>0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x<1/3\,,\\
&-1\leq \log(1-3x)\leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-1}\leq 1-3x\leq \mathrm{e} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1-\mathrm{e}}{3}\leq x\leq \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{3}\,,\\
&4-x^2-y^2>0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+y^2<4\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, esso è costituito dalla regione di piano interna alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2 e compresa fra le due rette verticali di equazione $x=(1-\mathrm{e})/3$ e $x=(1-\mathrm{e}^{-1})/3$, rispettivamente. In particolare, in tale regione, i punti della circonferenza NON appartengono al campo di esistenza, mentre i punti delle due rette vi appartengono.

Esercizio 5
L'insieme di definizione della funzione assegnata f è dato da $D=(-\infty,-1/3)\cup(-1/3,+\infty)$ e $f\in\mathcal{C}^\infty(D)$. Per quanto riguarda i limiti alla frontiera si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\mathrm{e}^{-x}}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x}=+\infty\,;\\
&\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\mathrm{e}^{-x}}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{3x}=-\infty\,;\\
&\lim_{x\to-1/3^\pm}\frac{x^2+\mathrm{e}^{-x}}{3x+1}=\pm\infty\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, la retta di equazione $x=-1/3$ è asintoto verticale per f, per $x\to-1/3^\pm$, mentre non ci sono asintoti orizzontali. Inoltre, poiché per $x\to+\infty$ la funzione è un infinito di ordine 1, controlliamo se essa ha un asintoto obliquo:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\mathrm{e}^{-x}}{3x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}\,;\\
&\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{3}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+3\mathrm{e}^{-x}-3x^2-x}{3(3x+1)}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{9x}=-\frac{1}{9}\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, la retta di equazione $y=x/3-1/9$ è asintoto obliquo per f, per $x\to+\infty$.

Esercizio 6
Le funzioni di cui ai punti B) e C) non presentano angoli, mentre la funzione in A) presenta un angolo in $x=0$ e quella in D) presenta un angolo in $x=-1$. Quindi la risposta corretta è A).

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per il $\sinh t$, con $t = 2x^{1/3}$, e quello al primo ordine per il $\log(1+t)$, con $t = x$, otteniamo

$$\sinh(2x^{1/3}) = 2x^{1/3} + \frac{8}{3!}x + o(x)\,, \qquad \log(1+x) = x + o(x)\,,$$

e quindi il limite proposto diviene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}(\sinh(2x^{1/3}) - 2x^{1/3})}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}(2x^{1/3} + \frac{4}{3}x - 2x^{1/3})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\mathrm{e}^{2x}x}{3x} = \frac{4}{3}\,.$$

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come integrale singolare la funzione $y(x) = 1$. Per $y \neq 1$, il suo integrale generale si ottiene come segue:

$$\int \frac{1}{(y-1)}\,dy = \int (\mathrm{e}^x - x)\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \log|y(x) - 1| = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} + C\,.$$

1. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1 + \mathrm{e}$, si ricava $C = 0$, quindi la soluzione cercata sarà

   $$|y(x) - 1| = \exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2})$$

   da cui, tenendo conto del segno di $y(x) - 1$, si ha

   $$y(x) = \exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}) + 1\,.$$

2. Per $\alpha = 1$, l'integrale singolare è soluzione del problema di Cauchy assegnato; pertanto, la soluzione richiesta è $y(x) = 1$.
3. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, si ricava $C = -1$, quindi la soluzione cercata sarà

   $$|y(x) - 1| = \exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - 1)$$

   da cui, tenendo conto del segno di $y(x) - 1$, si ha

   $$y(x) = -\exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - 1) + 1\,.$$

Alternativamente, l'equazione puó essere vista come una lineare del primo ordine. Applicando la formula risolutiva si ottiene l'integrale generale nella forma: $y(x) = C\exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}) + 1$. Ponendo $y(0) = \alpha$, si ricava $C = \frac{\alpha - 1}{\mathrm{e}}$ e per $\alpha = 1 + \mathrm{e}, 1, 0$ si ritrovano le soluzioni viste sopra.

Esercizio 3

Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0, +\infty)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ otteniamo

$$\text{per } x \to +\infty \quad f(x) \le \frac{1}{x^2 \log(1 + x^{3/2})} \quad \text{che è impropriamente integrabile;}$$

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{x^2}{x^2 \cdot x^{3/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{che non è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta non è impropriamente integrabile in $(0, +\infty)$.

Esercizio 4

Il campo di esistenza di f è fornito dalle condizioni

$$
\begin{aligned}
&1-2x>0 && \iff && x<1/2\,,\\
&-1\le \log(1-2x)\le 1 && \iff && \mathrm{e}^{-1}\le 1-2x\le \mathrm{e} && \iff && \frac{1-\mathrm{e}}{2}\le x\le \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}\,,\\
&1-x^2-y^2>0 && \iff && x^2+y^2<1\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, esso è costituito dalla regione di piano interna alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 e compresa fra le due rette verticali di equazione $x=(1-\mathrm{e})/2$ e $x=(1-\mathrm{e}^{-1})/2$, rispettivamente. In particolare, in tale regione, i punti della circonferenza NON appartengono al campo di esistenza, mentre i punti delle due rette vi appartengono.

Esercizio 5

L'insieme di definizione della funzione assegnata f è dato da $D=(-\infty,-1/2)\cup(-1/2,+\infty)$ e $f\in\mathcal{C}^\infty(D)$. Per quanto riguarda i limiti alla frontiera si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2\mathrm{e}^{-x}}{2x+1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x}=+\infty\,;\\
\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2\mathrm{e}^{-x}}{2x+1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{2\mathrm{e}^{-x}}{2x}=-\infty\,;\\
\lim_{x\to-1/2^{\pm}}\frac{2x^2+2\mathrm{e}^{-x}}{2x+1} &= \pm\infty\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, la retta di equazione $x=-1/2$ è asintoto verticale per f, per $x\to-1/2^{\pm}$, mentre non ci sono asintoti orizzontali. Inoltre, poiché per $x\to+\infty$ la funzione è un infinito di ordine 1, controlliamo se essa ha un asintoto obliquo:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2\mathrm{e}^{-x}}{2x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=1\,;\\
&\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2\mathrm{e}^{-x}-2x^2-x}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{2x}=-\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, la retta di equazione $y=x-1/2$ è asintoto obliquo per f, per $x\to+\infty$.

Esercizio 6

Le funzioni di cui ai punti $B)$ e $C)$ non presentano angoli, mentre la funzione in $A)$ presenta un angolo in $x=-1$ e quella in $D)$ presenta un angolo in $x=0$. Quindi la risposta corretta è $D)$.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per il $\sin t$, con $t = 4x^2$, e quello al primo ordine per il $\log(1+t)$, con $t = x^3$, otteniamo

$$\sin 4x^2 = 4x^2 - \frac{64}{3!}x^6 + o(x^6)\,, \qquad \log(1+x^3) = x^3 + o(x^3)\,,$$

e quindi il limite proposto diviene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x/2}(\sin 4x^2 - 4x^2)}{\log(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x/2}(4x^2 - \frac{32}{3}x^6 - 4x^2)}{x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{32e^{x/2}x^6}{3x^3} = 0\,.$$

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come integrale singolare la funzione $y(x) = -1$. Per $y \neq -1$, il suo integrale generale si ottiene come segue:

$$\int \frac{1}{(y+1)}\,dy = \int (e^{2x} + x^2)\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \log|y(x)+1| = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C\,.$$

1. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, si ricava $C = -1/2$, quindi la soluzione cercata sarà

$$|y(x)+1| = \exp(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2})$$

da cui, tenendo conto del segno di $y(x)+1$, si ha

$$y(x) = \exp(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}) - 1\,.$$

2. Per $\alpha = -1$, l'integrale singolare è soluzione del problema di Cauchy assegnato; pertanto, la soluzione richiesta è $y(x) = -1$.
3. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1 - \sqrt{e}$, si ricava $C = 0$, quindi la soluzione cercata sarà

$$|y(x)+1| = \exp(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3})$$

da cui, tenendo conto del segno di $y(x)+1$, si ha

$$y(x) = -\exp(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3}) - 1\,.$$

Alternativamente, l'equazione puó essere vista come una lineare del primo ordine. Applicando la formula risolutiva si ottiene l'integrale generale nella forma: $y(x) = C\exp(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^3}{3}) - 1$. Ponendo $y(0) = \alpha$, si ricava $C = \frac{\alpha+1}{\sqrt{e}}$ e per $\alpha = 0, -1, -1-\sqrt{e}$ si ritrovano le soluzioni viste sopra.

Esercizio 3

Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0,+\infty)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ otteniamo

$$\text{per } x \to +\infty \quad f(x) \leq \frac{2}{x^{3/2}\log(1+x^{2/3})} \quad \text{che è impropriamente integrabile;}$$

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{x^2/2}{x^{3/2}\cdot x^{2/3}} = \frac{1}{2x^{1/6}} \quad \text{che è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta risulta impropriamente integrabile in $(0,+\infty)$.

Esercizio 4
Il campo di esistenza di f è fornito dalle condizioni

$$1+3x>0 \iff x>-1/3\,,$$
$$-1\le \log(1+3x)\le 1 \iff \mathrm{e}^{-1}\le 1+3x\le \mathrm{e} \iff \frac{\mathrm{e}^{-1}-1}{3}\le x\le \frac{\mathrm{e}-1}{3}\,,$$
$$x^2+y^2-4>0 \iff x^2+y^2>4\,.$$

Pertanto, esso è costituito dalla regione di piano esterna alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2 e compresa fra le due rette verticali di equazione $x=(\mathrm{e}^{-1}-1)/3$ e $x=(\mathrm{e}-1)/3$, rispettivamente. In particolare, in tale regione, i punti della circonferenza NON appartengono al campo di esistenza, mentre i punti delle due rette vi appartengono.

Esercizio 5
L'insieme di definizione della funzione assegnata f è dato da $D=(-\infty,1/3)\cup(1/3,+\infty)$ e $f\in\mathcal{C}^\infty(D)$. Per quanto riguarda i limiti alla frontiera si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+\mathrm{e}^x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{3x}=-\infty\,;$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+\mathrm{e}^x}{3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{3x}=+\infty\,;$$
$$\lim_{x\to1/3^\pm}\frac{2x^2+\mathrm{e}^x}{3x-1}=\pm\infty\,.$$

Pertanto, la retta di equazione $x=1/3$ è asintoto verticale per f, per $x\to1/3^\pm$, mentre non ci sono asintoti orizzontali. Inoltre, poiché per $x\to-\infty$ la funzione è un infinito di ordine 1, controlliamo se essa ha un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+\mathrm{e}^x}{3x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}\,;$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{2}{3}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2+3\mathrm{e}^x-6x^2+2x}{3(3x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{9x}=\frac{2}{9}\,.$$

Pertanto, la retta di equazione $y=2x/3+2/9$ è asintoto obliquo per f, per $x\to-\infty$.

Esercizio 6
Le funzioni di cui ai punti A) e D) non presentano cuspidi, mentre la funzione in B) presenta una cuspide in $x=0$ e quella in C) presenta una cuspide in $x=-1$. Quindi la risposta corretta è B).