SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1
L'equazione proposta è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che ha come unico integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 0$. Per $y \neq 0$, gli altri integrali si ricavano per separazione di variabili:

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = -\int \tan x\, dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{y(x)} = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \log|\cos x| + C\,.$$

Pertanto, l'integrale generale sarà dato dalle funzioni

$$y(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad y(x) = -\frac{1}{\log|\cos x| + C}\,.$$

Esercizio 2
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Poiché

$$\int (\mathrm{e}^x - x)\, dx = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} + C_1 \qquad \text{e} \qquad \int \exp\left(-\int (\mathrm{e}^x - x)\, dx\right)(\mathrm{e}^x - x)\, dx = -\exp\left(-\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} + C_1\right) + C_2\,,$$

scegliendo $C_1 = C_2 = 0$ e applicando la formula risolutiva si ottiene l'integrale generale nella forma:

$$y(x) = C\exp(\mathrm{e}^x - x^2/2) - 1\,.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1 - \mathrm{e}$, si ricava $C = -1$, quindi la soluzione cercata sarà

$$y(x) = -\exp(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}) - 1\,.$$

Esercizio 3
Il campo di esistenza di f è fornito dalle condizioni

$$1 + 2x > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > -1/2\,,$$

$$-1 \leq \log(1 + 2x) \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-1} \leq 1 + 2x \leq \mathrm{e} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{e}^{-1} - 1}{2} \leq x \leq \frac{\mathrm{e} - 1}{2}\,,$$

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 > 1\,.$$

Pertanto, esso è costituito dalla regione di piano esterna alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 e compresa fra le due rette verticali di equazione $x = (\mathrm{e}^{-1} - 1)/2$ e $x = (\mathrm{e} - 1)/2$, rispettivamente. In particolare, in tale regione, i punti della circonferenza NON appartengono al campo di esistenza, mentre i punti delle due rette vi appartengono.

Esercizio 4
Osserviamo che il limite proposto si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^3 + (x-1)^2 + (y-2)^2}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5} &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \left[\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right] \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \left[\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 1\right]\,.\end{aligned}$$

Pertanto, effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nel punto $(1,2)$, cioè $x = 1 + r\cos\theta$ e $y = 2 + r\sin\theta$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left[\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 1\right] = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} + 1 = \lim_{r\to 0^+} r\cos^3\theta + 1 = 1\,.$$