SOLUZIONI COMPITO del 9/01/2013
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
INGEGNERIA MECCANICA
INGEGNERIA AMBIENTE e TERRITORIO

TEMA A

Esercizio 1

Utilizzando al numeratore lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$ e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 2x$, e per la funzione $x \mapsto \cos x$ e al denominatore lo sviluppo al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$, per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$ e per la funzione $x \mapsto \cos x$, otteniamo

$$\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)\,; \qquad \sin(2x) = 2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^4)\,;$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)\,; \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\,;$$

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)\,; \qquad \cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)\,.$$

Sostituendo nel limite proposto, ricaviamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - \sin(2x) - \cos x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^3}{x\left[\mathrm{e}^x - \log(1+x) - \cos x - \frac{3}{2}x^2\right]} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - 2x + \frac{4}{3}x^3 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^3}{x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^2\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{24}x^4}{x\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3\right)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{15}{24}x^4}{\frac{1}{6}x^4} = -\frac{15}{4}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Ponendo $w = \frac{z-2i}{z+2i}$, con $z \neq -2i$, l'equazione proposta, cioè $\arg(w) = 0$ equivale a richiedere che w sia un numero reale positivo. Quindi, otteniamo il sistema $\mathrm{Re}(w) > 0$ e $\mathrm{Im}(w) = 0$. Ponendo $z = a + ib$ e riscrivendo w nella forma

$$\frac{z-2i}{z+2i} = \frac{z-2i}{z+2i}\,\frac{\overline{z}-2i}{\overline{z}-2i} = \frac{|z|^2 - 2i(z+\overline{z}) - 4}{|z+2i|^2} = \frac{(a^2+b^2-4) - i(4a)}{|z+2i|^2}\,,$$

il sistema ottenuto diviene

$$\begin{cases} -4a = 0\,, \\ a^2 + b^2 > 4\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = 0\,, \\ b < -2 \text{ oppure } b > 2\,. \end{cases}$$

Quindi, l'equazione proposta ha come soluzioni il sottoinsieme dei numeri complessi della forma $z = ib$ con $b \in [-2,2]^c$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2(\alpha-1)\lambda - 4\alpha = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 2\alpha; -2$, che sono distinte per $\alpha \neq -1$, mentre coincidono per $\alpha = -1$.
Consideriamo dapprima il caso $\alpha \neq -1$. In tal caso, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{2\alpha x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$-4A\mathrm{e}^{-2x} + 4Ax\mathrm{e}^{-2x} - 2(\alpha-1)A\mathrm{e}^{-2x} + 4(\alpha-1)Ax\mathrm{e}^{-2x} - 4\alpha Ax\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad -2(\alpha+1)A = 1\,,$$

da cui $A = -1/[2(\alpha+1)]$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2(\alpha+1)}\, x\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Se, invece, $\alpha = -1$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x\mathrm{e}^{-2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{-2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$4Ax^2\mathrm{e}^{-2x} - 8Ax\mathrm{e}^{-2x} + 2A\mathrm{e}^{-2x} + 8Ax\mathrm{e}^{-2x} - 8Ax^2\mathrm{e}^{-2x} + 4Ax^2\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x} \quad \Longrightarrow \quad 2A = 1\,,$$

da cui $A = 1/2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\, x^2\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine; pertanto, l'integrale proposto diviene

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{x^2+2|x|+1}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+2x+1}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^2+2x+1-2x}{x^2+2x+1}\,dx = 2\left(\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx\right)\,.$$

Osservando che

$$\frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A = 2\,; \\ A+B = 0\,; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 2\,; \\ B = -2\,; \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} 2\left(\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx\right) &= 2 - 2\int_0^1 \frac{2}{x+1}\,dx + 2\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}\,dx \\ &= 2 - 4\log(x+1)\Big|_0^1 - \frac{4}{x+1}\Big|_0^1 = 2 - 4\log 2 - 2 + 4 = 4 - 4\log 2\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

L'affermazione (A) è corretta. Infatti, essendo per ipotesi $\{a_n\}$ positiva, infinitesima e monotona decrescente ed essendo la funzione $x \mapsto \sin x$ monotona crescente in $(0, \pi/2)$, anche la successione $\{\sin(a_n)\}$ è positiva, infinitesima e monotona decrescente e quindi, per il criterio di Leibniz la serie proposta converge semplicemente.

L'affermazione (B) è corretta, poiché per ipotesi $\mathrm{e}^{a_n} \to 1 \neq 0$; quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, la serie, che è a termini positivi, deve necessariamente divergere.

L'affermazione (C) è falsa, poiché il termine generale non è infinitesimo. Basta considerare $a_n = 1/n$ ed osservare che $\cos(1/n) \to 1 \neq 0$.

L'affermazione (D) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ da cui si ricava $\arctan(1/n) \sim 1/n$, che è il termine generale della serie armonica divergente.

TEMA B

Esercizio 1

Utilizzando al denominatore lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \arctan x$, per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = 3x$, e per la funzione $x \mapsto \cosh x$ e al numeratore lo sviluppo al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sinh x$, per la funzione $t \mapsto \tanh t$, con $t = 2x$ e per la funzione $x \mapsto \cosh x$, otteniamo

$$\arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)\,; \qquad \sinh 3x = 3x + \tfrac{9}{2}x^3 + o(x^4)\,;$$

$$\cosh x = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)\,; \qquad \sinh x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\,;$$

$$\tanh 2x = 2x - \tfrac{8}{3}x^3 + o(x^3)\,; \qquad \cosh x = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)\,.$$

Sostituendo nel limite proposto, ricaviamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x\left[2\sinh x - \tanh(2x) + \cosh x - 1 - \frac{1}{2}x^2\right]}{3\arctan x - \sinh(3x) - 2\cosh x + 2 + x^2 + \frac{11}{2}x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2x + \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{8}{3}x^3 + 1 + \frac{1}{2}x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^2\right)}{3x - x^3 - 3x - \frac{9}{2}x^3 - 2 - x^2 - \frac{1}{12}x^4 + 2 + x^2 + \frac{11}{2}x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^3\right)}{-\frac{1}{12}x^4} = \lim_{x\to 0} -\frac{3x^4}{\frac{1}{12}x^4} = -36\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Ponendo $w = \frac{iz+1}{z+i}$, con $z \neq -i$, l'equazione proposta, cioè $\arg(w) = -\pi/2$ equivale a richiedere che w sia un numero immaginario puro con parte immaginaria negativa. Quindi, otteniamo il sistema $\mathrm{Re}(w) = 0$ e $\mathrm{Im}(w) < 0$. Ponendo $z = a + ib$ e riscrivendo w nella forma

$$\frac{iz+1}{z+i} = \frac{iz+1}{z+i}\,\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}-i} = \frac{i|z|^2 + (z+\overline{z}) - i}{|z+i|^2} = \frac{2a + i(a^2+b^2-1)}{|z+i|^2}\,,$$

il sistema ottenuto diviene

$$\begin{cases} 2a = 0\,, \\ a^2 + b^2 < 1\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 0\,, \\ -1 < b < 1\,. \end{cases}$$

Quindi, l'equazione proposta ha come soluzioni il sottoinsieme dei numeri complessi della forma $z = ib$ con $b \in (-1, 1)$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2(2-\alpha)\lambda - 8\alpha = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 2\alpha; -4$, che sono distinte per $\alpha \neq -2$, mentre coincidono per $\alpha = -2$.

Consideriamo dapprima il caso $\alpha \neq -2$. In tal caso, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{2\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-4x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$-8A\mathrm{e}^{-4x} + 16Ax\mathrm{e}^{-4x} + 2(2-\alpha)A\mathrm{e}^{-4x} - 4(2-\alpha)Ax\mathrm{e}^{-4x} - 8\alpha Ax\mathrm{e}^{-4x} = 2\mathrm{e}^{-4x} \quad \Longrightarrow \quad -2(2+\alpha)A = 2\,,$$

da cui $A = -1/(2+\alpha)$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2\alpha x} + C_2\mathrm{e}^{-4x} - \frac{1}{2+\alpha}\,x\mathrm{e}^{-4x}\,.$$

Se, invece, $\alpha = -2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2 x\mathrm{e}^{-4x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{-4x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$16Ax^2\mathrm{e}^{-4x} - 16Ax\mathrm{e}^{-4x} + 2A\mathrm{e}^{-4x} + 16Ax\mathrm{e}^{-4x} - 32Ax^2\mathrm{e}^{-4x} + 16Ax^2\mathrm{e}^{-4x} = 2\mathrm{e}^{-4x} \quad \Longrightarrow \quad 2A = 2\,,$$

da cui $A = 1$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2 x\mathrm{e}^{-4x} + x^2\mathrm{e}^{-4x}\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine; pertanto, l'integrale proposto diviene

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{2\sin^2 x + 5}{2\sin^2 x + 1} \cos x \, dx = 2\int_{0}^{\pi/4} \frac{2\sin^2 x + 5}{2\sin^2 x + 1} \cos x \, dx \, .$$

Effettuando, ora, una sostituzione di variabile $t = \sin x$, da cui $\cos x \, dx = dt$, $t(0) = 0$, $t(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, otteniamo

$$\begin{aligned} 2\int_{0}^{\pi/4} \frac{2\sin^2 x + 5}{2\sin^2 x + 1} \cos x \, dx &= 2\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{2t^2 + 5}{2t^2 + 1} \, dt = 2\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{2t^2 + 1 + 4}{2t^2 + 1} \, dt = 2\int_{0}^{1/\sqrt{2}} 1 \, dt + 2\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{4}{2t^2 + 1} \, dt \\ &= \sqrt{2} + \frac{8}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t)\Big|_{0}^{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 4\sqrt{2}\arctan 1 = \sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}(1+\pi) \, . \end{aligned}$$

Esercizio 5

L'affermazione (A) è falsa, poiché il termine generale non è infinitesimo. Basta considerare $a_n = 1/n$ ed osservare che $e^{1/n} \to 1 \neq 0$.

L'affermazione (B) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ da cui si ricava $\log(1 + 1/n) \sim 1/n$, che è il termine generale della serie armonica divergente.

L'affermazione (C) è corretta. Infatti, essendo per ipotesi $\{a_n\}$ positiva, infinitesima e monotona decrescente ed essendo la funzione $x \mapsto \tan x$ monotona crescente in $(0, \pi/2)$, anche la successione $\{\tan(a_n)\}$ è positiva, infinitesima e monotona decrescente e quindi, per il criterio di Leibniz la serie proposta converge semplicemente.

L'affermazione (D) è corretta, poiché per ipotesi $\cosh(a_n) \to 1 \neq 0$; quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, la serie, che è a termini positivi, deve necessariamente divergere.

TEMA C

Esercizio 1

Utilizzando al denominatore lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \arctan t$, con $t = 2x$, per la funzione $x \mapsto \sinh x$ e per la funzione $t \mapsto \cosh t$, con $t = 2x$, e al numeratore lo sviluppo al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \tanh x$, per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = 2x$ e per la funzione $x \mapsto \cosh x$, otteniamo

$$\arctan 2x = 2x - \tfrac{8}{3}x^3 + o(x^4)\,; \qquad \sinh x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\,;$$

$$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)\,; \qquad \tanh x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)\,;$$

$$\sinh 2x = 2x + \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)\,; \qquad \cosh x = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)\,.$$

Sostituendo nel limite proposto, ricaviamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x\left[2\tanh x - \sinh(2x) + 3 - 3\cosh x + \frac{3}{2}x^2\right]}{\arctan(2x) - 2\sinh x + \cosh(2x) - 1 - 2x^2 + 3x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2x - \frac{2}{3}x^3 - 2x - \frac{4}{3}x^3 + 3 - 3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2\right)}{2x - \frac{8}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{3}x^3 + 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 1 - 2x^2 + 3x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^3\right)}{\frac{2}{3}x^4} = \lim_{x\to 0} -\frac{2x^4}{\frac{2}{3}x^4} = -3\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Ponendo $w = \frac{iz-1}{z-i}$, con $z \neq i$, l'equazione proposta, cioè $\arg(w) = \pi/2$ equivale a richiedere che w sia un numero immaginario puro con parte immaginaria positiva. Quindi, otteniamo il sistema $\mathrm{Re}(w) = 0$ e $\mathrm{Im}(w) > 0$. Ponendo $z = a + ib$ e riscrivendo w nella forma

$$\frac{iz-1}{z-i} = \frac{iz-1}{z-i}\,\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}+i} = \frac{i|z|^2 - (z+\overline{z}) - i}{|z-i|^2} = \frac{-2a + i(a^2+b^2-1)}{|z-i|^2}\,,$$

il sistema ottenuto diviene

$$\begin{cases} -2a = 0\,, \\ a^2 + b^2 > 1\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = 0\,, \\ b < -1 \text{ oppure } b > 1\,. \end{cases}$$

Quindi, l'equazione proposta ha come soluzioni il sottoinsieme dei numeri complessi della forma $z = ib$ con $b \in [-1,1]^c$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2(2+\alpha)\lambda + 8\alpha = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 2\alpha; 4$, che sono distinte per $\alpha \neq 2$, mentre coincidono per $\alpha = 2$.

Consideriamo dapprima il caso $\alpha \neq 2$. In tal caso, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{2\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{4x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$8A\mathrm{e}^{4x} + 16Ax\mathrm{e}^{4x} - 2(2+\alpha)A\mathrm{e}^{4x} - 4(2+\alpha)Ax\mathrm{e}^{4x} + 8\alpha Ax\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{4x} \qquad \Longrightarrow \qquad 2(2-\alpha)A = 1\,,$$

da cui $A = 1/[2(2-\alpha)]$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{4x} + \frac{1}{2(2-\alpha)}\, x\mathrm{e}^{4x}\,.$$

Se, invece, $\alpha = 2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax^2 e^{4x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$16Ax^2 e^{4x} + 16Axe^{4x} + 2Ae^{4x} - 16Axe^{4x} - 32Ax^2 e^{4x} + 16Ax^2 e^{4x} = e^{4x} \quad \Longrightarrow \quad 2A = 1\,,$$

da cui $A = 1/2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + \frac{1}{2} x^2 e^{4x}\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine; pertanto, l'integrale proposto diviene

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{4\sin^2 x + 3}{4\sin^2 x + 1} \cos x\,dx = 2\int_0^{\pi/6} \frac{4\sin^2 x + 3}{4\sin^2 x + 1} \cos x\,dx\,.$$

Effettuando, ora, una sostituzione di variabile $t = \sin x$, da cui $\cos x\,dx = dt$, $t(0) = 0$, $t(\pi/6) = 1/2$, otteniamo

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\pi/6} \frac{4\sin^2 x + 3}{4\sin^2 x + 1} \cos x\,dx &= 2\int_0^{1/2} \frac{4t^2+3}{4t^2+1}\,dt = 2\int_0^{1/2} \frac{4t^2+1+2}{4t^2+1}\,dt = 2\int_0^{1/2} 1\,dt + 2\int_0^{1/2} \frac{2}{4t^2+1}\,dt \\ &= 1 + \frac{4}{2}\arctan(2t)\Big|_0^{1/2} = 1 + 2\arctan 1 = 1 + 2\,\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

L'affermazione (A) è falsa, poiché il termine generale non è infinitesimo. Basta considerare $a_n = 1/n$ ed osservare che $e^{1/n} \to 1 \neq 0$.
L'affermazione (B) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ da cui si ricava $\log(1 + 1/n) \sim 1/n$, che è il termine generale della serie armonica divergente.
L'affermazione (C) è corretta. Infatti, essendo per ipotesi $\{a_n\}$ positiva, infinitesima e monotona decrescente ed essendo la funzione $x \mapsto \tan x$ monotona crescente in $(0, \pi/2)$, anche la successione $\{\tan(a_n)\}$ è positiva, infinitesima e monotona decrescente e quindi, per il criterio di Leibniz la serie proposta converge semplicemente.
L'affermazione (D) è corretta, poiché per ipotesi $\cosh(a_n) \to 1 \neq 0$; quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, la serie, che è a termini positivi, deve necessariamente divergere.

TEMA D

Esercizio 1

Utilizzando al numeratore lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 2x$, e per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$ e al denominatore lo sviluppo al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 2x$, per la funzione $x \mapsto \cos x$ e per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 2x$, otteniamo

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\,; \qquad \cos(2x) = 1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)\,;$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)\,; \qquad \log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \tfrac{8}{3}x^3 + o(x^3)\,;$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)\,; \qquad \mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)\,.$$

Sostituendo nel limite proposto, ricaviamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos(2x) - \mathrm{e}^x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}{x\,[\log(1+2x) + 2\cos x - \mathrm{e}^{2x} - 1 + 5x^2]} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}{x\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + 2 - x^2 - 1 - 2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 1 + 5x^2\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{24}x^4}{x\left(\frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{8}x^4}{\frac{4}{3}x^4} = \frac{15}{32}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Ponendo $w = \frac{z+2i}{z-2i}$, con $z \neq 2i$, l'equazione proposta, cioè $\arg(w) = \pi$ equivale a richiedere che w sia un numero reale negativo. Quindi, otteniamo il sistema $\mathrm{Re}(w) < 0$ e $\mathrm{Im}(w) = 0$. Ponendo $z = a + ib$ e riscrivendo w nella forma

$$\frac{z+2i}{z-2i} = \frac{z+2i}{z-2i}\,\frac{\overline{z}+2i}{\overline{z}+2i} = \frac{|z|^2 + 2i(z+\overline{z}) - 4}{|z-2i|^2} = \frac{(a^2+b^2-4) + i(4a)}{|z-2i|^2}\,,$$

il sistema ottenuto diviene

$$\begin{cases} 4a = 0\,, \\ a^2 + b^2 < 4\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 0\,, \\ -2 < b < 2\,. \end{cases}$$

Quindi, l'equazione proposta ha come soluzioni il sottoinsieme dei numeri complessi della forma $z = ib$ con $b \in (-2, 2)$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2(\alpha+1)\lambda + 4\alpha = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 2\alpha; 2$, che sono distinte per $\alpha \neq 1$, mentre coincidono per $\alpha = 1$.

Consideriamo dapprima il caso $\alpha \neq 1$. In tal caso, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{2\alpha x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$4A\mathrm{e}^{2x} + 4Ax\mathrm{e}^{2x} - 2(\alpha+1)A\mathrm{e}^{2x} - 4(\alpha+1)Ax\mathrm{e}^{2x} + 4\alpha Ax\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \quad \Longrightarrow \quad 2(1-\alpha)A = 2\,,$$

da cui $A = 1/(1-\alpha)$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2\alpha x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{1-\alpha}\,x\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Se, invece, $\alpha = 1$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$4Ax^2\mathrm{e}^{2x} + 8Ax\mathrm{e}^{2x} + 2A\mathrm{e}^{2x} - 8Ax\mathrm{e}^{2x} - 8Ax^2\mathrm{e}^{2x} + 4Ax^2\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \quad \Longrightarrow \quad A = 1\,.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x} + x^2\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine; pertanto, l'integrale proposto diviene

$$\int_{-2}^{2} \frac{2x^2+8}{x^2+4|x|+4}\,dx = 4\int_0^2 \frac{x^2+4}{x^2+4x+4}\,dx = 4\int_0^2 \frac{x^2+4x+4-4x}{x^2+4x+4}\,dx = 4\left(\int_0^2 1\,dx - \int_0^2 \frac{4x}{(x+2)^2}\,dx\right).$$

Osservando che

$$\frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A = 4\,; \\ 2A+B = 0\,; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 4\,; \\ B = -8\,; \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} 4\left(\int_0^2 1\,dx - \int_0^2 \frac{4x}{(x+2)^2}\,dx\right) &= 8 - 4\int_0^2 \frac{4}{x+2}\,dx + 4\int_0^1 \frac{8}{(x+2)^2}\,dx = 8 - 16\log(x+2)\Big|_0^2 - \frac{32}{x+2}\Big|_0^2 \\ &= 8 - 16\log 4 + 16\log 2 - \frac{32}{4} + \frac{32}{2} = 16 - 16\log 2\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

L'affermazione (A) è corretta. Infatti, essendo per ipotesi $\{a_n\}$ positiva, infinitesima e monotona decrescente ed essendo la funzione $x \mapsto \sin x$ monotona crescente in $(0, \pi/2)$, anche la successione $\{\sin(a_n)\}$ è positiva, infinitesima e monotona decrescente e quindi, per il criterio di Leibniz la serie proposta converge semplicemente.

L'affermazione (B) è corretta, poiché per ipotesi $\mathrm{e}^{a_n} \to 1 \neq 0$; quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, la serie, che è a termini positivi, deve necessariamente divergere.

L'affermazione (C) è falsa, poiché il termine generale non è infinitesimo. Basta considerare $a_n = 1/n$ ed osservare che $\cos(1/n) \to 1 \neq 0$.

L'affermazione (D) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ da cui si ricava $\arctan(1/n) \sim 1/n$, che è il termine generale della serie armonica divergente.