SOLUZIONI COMPITO del 9/01/2019
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che il limite proposto è un caso di indecisione del tipo 1^∞, che può essere riscritto nella forma

$$\mathrm{e}^{\log\left[\left(1+\sin\left(\frac{2}{n^2+n}\right)\right)^{n^2+1}\right]} = \mathrm{e}^{(n^2+1)\log\left[1+\sin\left(\frac{2}{n^2+n}\right)\right]}\,.$$

Pertanto, ricordando che $\log(1+t) \sim t$, con $t = \sin\left(\frac{2}{n^2+n}\right)$, che $\sin t \sim t$, con $t = \frac{2}{n^2+n}$, che $n^2+n \sim n^2$ e che $n^2+1 \sim n^2$, per $n \to +\infty$, si ricava

$$(n^2+1)\log\left[1+\sin\left(\frac{2}{n^2+n}\right)\right] \sim n^2 \sin\left(\frac{2}{n^2+n}\right) \sim n^2\,\frac{2}{n^2+n} \sim \frac{2n^2}{n^2} = 2\,,$$

da cui si ottiene che il limite proposto converge a e^2.

Esercizio 2

Poiché la funzione integranda è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione integrale proposta è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; quindi, dal Teorema di Torricelli, si ricava

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{4^x} - \frac{3}{2^x} + 2}{x^2+1} = \frac{\left(\frac{1}{2^x}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2^x}\right) + 2}{x^2+1}\,.$$

Tenendo conto che il denominatore è sempre strettamente positivo, effettuando la sostituzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ed utilizzando il Teorema di Fermat e il criterio di monotonia, siamo portati a studiare

$$\left(\frac{1}{2^x}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2^x}\right) + 2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 - 3y + 2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y < 1 \ \cup \ y > 2\,, \\ y = 1; 2\,, \\ 1 < y < 2\,, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = 1; 2$. Pertanto, osservando che $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1; 2$ equivale a $x = 0; -1$ e che la base dell'esponenziale è minore di 1, si ricava che $F'(x) < 0$, cioè F è decrescente, per $-1 < x < 0$; $F'(x) > 0$, cioè F è crescente, per $x < -1$ o $x > 0$; $F'(x) = 0$ per $x = 0; -1$. In conclusione, $x = -1$ è punto di massimo relativo, mentre $x = 0$ è punto di minimo relativo.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, dove possiamo porre

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \qquad \text{e} \qquad g(y) = \frac{y^2+4}{y}\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$, possiamo garantire che esiste un'unica soluzione $y(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno del punto iniziale $x_0 = 0$. Poiché l'equazione è priva di soluzioni singolari, in quanto $y^2 + 4 = 0$ è un'equazione impossibile, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata separando le variabili. Otteniamo

$$\log\left(\sqrt{y^2+4}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+4}\,dy = \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,dx = \log(\mathrm{e}^x+1) + C\,.$$

Quindi,

$$\sqrt{y^2(x)+4} = k(\mathrm{e}^x+1)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt{K(\mathrm{e}^x+1)^2 - 4}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, si ricava $\sqrt{12} = \sqrt{4K-4}$, da cui $K = 4$. Pertanto, la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \sqrt{4(\mathrm{e}^x+1)^2 - 4} = 2\sqrt{(\mathrm{e}^x+1)^2 - 1} = 2\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x}\,.$$

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è positiva e continua nell'intervallo $[0, +\infty)$, resta solo da studiare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$. Tenendo conto che, per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \frac{\log(\mathrm{e}^{x^2})}{3x^{5/2} + x^{3\alpha}} \sim \begin{cases} \dfrac{x^2}{3x^{5/2}} = \dfrac{1}{3x^{1/2}}\,, & \text{se } 3\alpha < 5/2, \text{ ovvero } \alpha < 5/6; \\ \dfrac{x^2}{3x^{5/2} + x^{5/2}} = \dfrac{1}{4x^{1/2}}\,, & \text{se } 3\alpha = 5/2, \text{ ovvero } \alpha = 5/6; \\ \dfrac{x^2}{x^{3\alpha}} = \dfrac{1}{x^{3\alpha-2}}\,, & \text{se } 3\alpha > 5/2, \text{ ovvero } \alpha > 5/6; \end{cases}$$

si ricava che l'integrale improprio converge se e solo se $\alpha > 5/6$ e $3\alpha - 2 > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 5

Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

a) L'affermazione è vera; infatti, poiché $\{b_n\}$ è limitata (diciamo da un costante M), si ricava che $a_n b_n \leq M a_n$ e, per il criterio della radice, la $\sum a_n$ converge. Quindi, dal criterio del confronto, anche la serie proposta converge.

b) L'affermazione è vera. Infatti, per il criterio della radice, la $\sum a_n$ converge e, quindi, il suo termine generale $a_n \to 0^+$. Questo implica che $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ e, pertanto, poiché il suo termine generale, non essendo infinitesimo, non soddisfa la condizione necessaria, la serie proposta diverge.

c) L'affermazione è falsa; basta considerare le successioni $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, dove $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$ e $b_n \to 0$, quindi è limitata. In tal caso, otteniamo

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(1/2)^n}{(1/4)^n} = 2^n \to +\infty \neq 0\,, \qquad \text{pertanto, la serie proposta non converge.}$$

d) L'affermazione è falsa; basta considerare le successioni $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, dove $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$ e $b_n \to 0$, quindi è limitata. In tal caso, otteniamo

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(1/4)^n}{(1/2)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \text{che è il termine generale di una serie geometrica convergente.}$$

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che il limite proposto è un caso di indecisione del tipo 1^∞, che può essere riscritto nella forma

$$\mathrm{e}^{\log\left[\left(1+\tan\left(\frac{3}{n^4+2n}\right)\right)^{n^4+n^3}\right]} = \mathrm{e}^{(n^4+n^3)\log\left[1+\tan\left(\frac{3}{n^4+2n}\right)\right]}\,.$$

Pertanto, ricordando che $\log(1+t) \sim t$, con $t = \tan\left(\frac{3}{n^4+2n}\right)$, che $\tan t \sim t$, con $t = \frac{3}{n^4+2n}$, che $n^4+2n \sim n^4$ e che $n^4+n^3 \sim n^4$, per $n \to +\infty$, si ricava

$$(n^4+n^3)\log\left[1+\tan\left(\frac{3}{n^4+2n}\right)\right] \sim n^4 \tan\left(\frac{3}{n^4+2n}\right) \sim n^4\,\frac{3}{n^4+2n} \sim \frac{3n^4}{n^4} = 3\,,$$

da cui si ottiene che il limite proposto converge a e^3.

Esercizio 2

Poiché la funzione integranda è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione integrale proposta è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; quindi, dal Teorema di Torricelli, si ricava

$$F'(x) = \frac{\frac{5}{4^x} - \frac{1}{(16)^x} - 4}{x^4+2} = \frac{5\left(\frac{1}{4^x}\right) - \left(\frac{1}{4^x}\right)^2 - 4}{x^4+2}\,.$$

Tenendo conto che il denominatore è sempre strettamente positivo, effettuando la sostituzione $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ed utilizzando il Teorema di Fermat e il criterio di monotonia, siamo portati a studiare

$$-\left(\frac{1}{4^x}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{4^x}\right) - 4 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 - 5y + 4 \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 1 < y < 4\,, \\ y = 1; 4\,, \\ y < 1 \ \cup \ y > 4\,, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = 1; 4$. Pertanto, osservando che $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 1; 4$ equivale a $x = 0; -1$ e che la base dell'esponenziale è minore di 1, si ricava che $F'(x) > 0$, cioè F è crescente, per $-1 < x < 0$; $F'(x) < 0$, cioè F è decrescente, per $x < -1$ o $x > 0$; $F'(x) = 0$ per $x = 0; -1$. In conclusione, $x = -1$ è punto di minimo relativo, mentre $x = 0$ è punto di massimo relativo.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, dove possiamo porre

$$f(x) = \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-x}} \qquad \text{e} \qquad g(y) = \frac{y^2+3}{y}\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$, possiamo garantire che esiste un'unica soluzione $y(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno del punto iniziale $x_0 = 0$. Poiché l'equazione è priva di soluzioni singolari, in quanto $y^2+3 = 0$ è un'equazione impossibile, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata separando le variabili. Otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(y^2+3\right) = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+3}\,dy = \int \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(2\mathrm{e}^x+1) + C\,.$$

Quindi,

$$y^2(x) + 3 = k(2\mathrm{e}^x+1)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt{k(2\mathrm{e}^x+1)-3}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, si ricava $2\sqrt{3} = \sqrt{3k-3}$, da cui $k = 5$. Pertanto, la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \sqrt{5(2\mathrm{e}^x+1)-3} = \sqrt{10\mathrm{e}^x+2} = \sqrt{2}\sqrt{5\mathrm{e}^x+1}\,.$$

Esercizio 4
Poiché la funzione integranda è positiva e continua nell'intervallo $[0, +\infty)$, resta solo da studiare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$. Tenendo conto che, per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^{1/2} + 2x^{2\alpha}}{\log(e^{x^3})} \sim \begin{cases} \dfrac{x^{1/2}}{x^3} = \dfrac{1}{x^{5/2}}\,, & \text{se } 2\alpha < 1/2, \text{ ovvero } \alpha < 1/4; \\ \dfrac{x^{1/2} + 2x^{1/2}}{x^3} = \dfrac{3}{x^{5/2}}\,, & \text{se } 2\alpha = 1/2, \text{ ovvero } \alpha = 1/4; \\ \dfrac{2x^{2\alpha}}{x^3} = \dfrac{2}{x^{3-2\alpha}}\,, & \text{se } 2\alpha > 1/2, \text{ ovvero } \alpha > 1/4; \end{cases}$$

si ricava che l'integrale improprio converge per $\alpha \leq 1/4$ oppure, se $\alpha > 1/4$, per $3 - 2\alpha > 1$, ovvero per $1/4 < \alpha < 1$. In conclusione, l'integrale improprio converge per $\alpha < 1$.

Esercizio 5
Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

a) L'affermazione è falsa; basta considerare le successioni $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, dove $a_n \to 0$ e $\sqrt[n]{b_n} \to \frac{1}{4}$. In tal caso, otteniamo

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(1/2)^n}{(1/4)^n} = 2^n \to +\infty \neq 0\,, \qquad \text{pertanto, la serie proposta non converge.}$$

b) L'affermazione è vera; infatti, poiché $a_n \to 0$, essa è definitivamente < 1. Quindi, si ricava che $a_n^2 b_n \leq b_n$ e, per il criterio della radice, la $\sum b_n$ converge. Quindi, dal criterio del confronto, anche la serie proposta converge.

c) L'affermazione è vera. Infatti, per il criterio della radice, la $\sum b_n$ converge e, quindi, il suo termine generale $b_n \to 0^+$. Questo implica che $\frac{1}{b_n} \to +\infty$ e, pertanto, poiché il suo termine generale, non essendo infinitesimo, non soddisfa la condizione necessaria, la serie proposta diverge.

d) L'affermazione è falsa; basta considerare le successioni $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, dove $a_n \to 0$ e $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{4}$. In tal caso, otteniamo

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(1/4)^n}{(1/2)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\,, \qquad \text{che è il termine generale di una serie geometrica convergente.}$$

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che il limite proposto è un caso di indecisione del tipo 1^∞, che può essere riscritto nella forma

$$\mathrm{e}^{\log\left[\left(1+\tanh\left(\frac{5}{n^4+n}\right)\right)^{n^4+4n^2}\right]} = \mathrm{e}^{(n^4+4n^2)\log\left[1+\tanh\left(\frac{5}{n^4+n}\right)\right]}\,.$$

Pertanto, ricordando che $\log(1+t) \sim t$, con $t = \tanh\left(\frac{5}{n^4+n}\right)$, che $\tanh t \sim t$, con $t = \frac{5}{n^4+n}$, che $n^4+n \sim n^4$ e che $n^4+4n^2 \sim n^4$, per $n \to +\infty$, si ricava

$$(n^4+4n^2)\log\left[1+\tanh\left(\frac{5}{n^4+n}\right)\right] \sim n^4 \tanh\left(\frac{5}{n^4+n}\right) \sim n^4\,\frac{5}{n^4+n} \sim \frac{5n^4}{n^4} = 5\,,$$

da cui si ottiene che il limite proposto converge a e^5.

Esercizio 2

Poiché la funzione integranda è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione integrale proposta è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; quindi, dal Teorema di Torricelli, si ricava

$$F'(x) = \frac{\frac{6}{5^x} - \frac{1}{(25)^x} - 5}{x^2+2} = \frac{6\left(\frac{1}{5^x}\right) - \left(\frac{1}{5^x}\right)^2 - 5}{x^2+2}\,.$$

Tenendo conto che il denominatore è sempre strettamente positivo, effettuando la sostituzione $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ed utilizzando il Teorema di Fermat e il criterio di monotonia, siamo portati a studiare

$$-\left(\frac{1}{5^x}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{5^x}\right) - 5 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 - 6y + 5 \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 1 < y < 5\,, \\ y = 1; 5\,, \\ y < 1 \ \cup \ y > 5\,, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $y = 3 \pm \sqrt{9-5} = 1; 5$. Pertanto, osservando che $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 1; 5$ equivale a $x = 0; -1$ e che la base dell'esponenziale è minore di 1, si ricava che $F'(x) > 0$, cioè F è crescente, per $-1 < x < 0$; $F'(x) < 0$, cioè F è decrescente, per $x < -1$ o $x > 0$; $F'(x) = 0$ per $x = 0; -1$. In conclusione, $x = -1$ è punto di minimo relativo, mentre $x = 0$ è punto di massimo relativo.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, dove possiamo porre

$$f(x) = \frac{1}{2+3\mathrm{e}^{-x}} \qquad \text{e} \qquad g(y) = \frac{y^2+5}{y}\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$, possiamo garantire che esiste un'unica soluzione $y(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno del punto iniziale $x_0 = 0$. Poiché l'equazione è priva di soluzioni singolari, in quanto $y^2+5 = 0$ è un'equazione impossibile, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata separando le variabili. Otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left(y^2+5\right) = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+5}\,dy = \int \frac{1}{2+3\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+3}\,dx = \frac{1}{2}\log(2\mathrm{e}^x+3) + C\,.$$

Quindi,

$$y^2(x) + 5 = k(2\mathrm{e}^x+3)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt{k(2\mathrm{e}^x+3)-5}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, si ricava $\sqrt{10} = \sqrt{5k-5}$, da cui $k = 3$. Pertanto, la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \sqrt{3(2\mathrm{e}^x+3)-5} = \sqrt{6\mathrm{e}^x+4} = \sqrt{2}\sqrt{3\mathrm{e}^x+2}\,.$$

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è positiva e continua nell'intervallo $[0, +\infty)$, resta solo da studiare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$. Tenendo conto che, per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \frac{2x^{3/2} + 5x^{4\alpha}}{\log(\mathrm{e}^{x^5})} \sim \begin{cases} \dfrac{2x^{3/2}}{x^5} = \dfrac{2}{x^{7/2}}\,, & \text{se } 4\alpha < 3/2, \text{ ovvero } \alpha < 3/8; \\ \dfrac{2x^{3/2} + 5x^{3/2}}{x^5} = \dfrac{7}{x^{7/2}}\,, & \text{se } 4\alpha = 3/2, \text{ ovvero } \alpha = 3/8; \\ \dfrac{5x^{4\alpha}}{x^5} = \dfrac{5}{x^{5-4\alpha}}\,, & \text{se } 4\alpha > 3/2, \text{ ovvero } \alpha > 3/8; \end{cases}$$

si ricava che l'integrale improprio converge per $\alpha \leq 3/8$ oppure, se $\alpha > 3/8$, per $5 - 4\alpha > 1$, ovvero per $3/8 < \alpha < 1$. In conclusione, l'integrale improprio converge per $\alpha < 1$.

Esercizio 5

Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

a) L'affermazione è falsa; basta considerare le successioni $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, dove $a_n \to 0$ e $\sqrt[n]{b_n} \to \frac{1}{4}$. In tal caso, otteniamo

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(1/2)^n}{(1/4)^n} = 2^n \to +\infty \neq 0\,, \qquad \text{pertanto, la serie proposta non converge.}$$

b) L'affermazione è vera; infatti, poiché $a_n \to 0$, essa è definitivamente < 1. Quindi, si ricava che $a_n^2 b_n \leq b_n$ e, per il criterio della radice, la $\sum b_n$ converge. Quindi, dal criterio del confronto, anche la serie proposta converge.

c) L'affermazione è vera. Infatti, per il criterio della radice, la $\sum b_n$ converge e, quindi, il suo termine generale $b_n \to 0^+$. Questo implica che $\frac{1}{b_n} \to +\infty$ e, pertanto, poiché il suo termine generale, non essendo infinitesimo, non soddisfa la condizione necessaria, la serie proposta diverge.

d) L'affermazione è falsa; basta considerare le successioni $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, dove $a_n \to 0$ e $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{4}$. In tal caso, otteniamo

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(1/4)^n}{(1/2)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \text{che è il termine generale di una serie geometrica convergente.}$$

TEMA D

Esercizio 1
Osserviamo che il limite proposto è un caso di indecisione del tipo 1^∞, che può essere riscritto nella forma

$$\mathrm{e}^{\log\left[\left(1+\sinh\left(\frac{4}{n^2+1}\right)\right)^{n^2+n}\right]} = \mathrm{e}^{(n^2+n)\log\left[1+\sinh\left(\frac{4}{n^2+1}\right)\right]}.$$

Pertanto, ricordando che $\log(1+t) \sim t$, con $t = \sinh\left(\frac{4}{n^2+1}\right)$, che $\sinh t \sim t$, con $t = \frac{4}{n^2+1}$, che $n^2+1 \sim n^2$ e che $n^2+n \sim n$, per $n \to +\infty$, si ricava

$$(n^2+n)\log\left[1+\sinh\left(\frac{4}{n^2+1}\right)\right] \sim n^2 \sinh\left(\frac{4}{n^2+1}\right) \sim n^2\,\frac{4}{n^2+1} \sim \frac{4n^2}{n^2} = 4\,,$$

da cui si ottiene che il limite proposto converge a e^4.

Esercizio 2
Poiché la funzione integranda è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione integrale proposta è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; quindi, dal Teorema di Torricelli, si ricava

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{9^x} - \frac{4}{3^x} + 3}{x^4+1} = \frac{\left(\frac{1}{3^x}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3^x}\right) + 3}{x^4+1}.$$

Tenendo conto che il denominatore è sempre strettamente positivo, effettuando la sostituzione $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ed utilizzando il Teorema di Fermat e il criterio di monotonia, siamo portati a studiare

$$\left(\frac{1}{3^x}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3^x}\right) + 3 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 - 4y + 3 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y < 1 \ \cup \ y > 3\,, \\ y = 1; 3\,, \\ 1 < y < 3\,, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $y = 2 \pm \sqrt{4-3} = 1; 3$. Pertanto, osservando che $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1; 3$ equivale a $x = 0; -1$ e che la base dell'esponenziale è minore di 1, si ricava che $F'(x) < 0$, cioè F è decrescente, per $-1 < x < 0$; $F'(x) > 0$, cioè F è crescente, per $x < -1$ o $x > 0$; $F'(x) = 0$ per $x = 0; -1$. In conclusione, $x = -1$ è punto di massimo relativo, mentre $x = 0$ è punto di minimo relativo.

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, dove possiamo porre

$$f(x) = \frac{1}{1+2\mathrm{e}^{-x}} \qquad \text{e} \qquad g(y) = \frac{y^2+9}{y}.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$, possiamo garantire che esiste un'unica soluzione $y(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno del punto iniziale $x_0 = 0$. Poiché l'equazione è priva di soluzioni singolari, in quanto $y^2 + 9 = 0$ è un'equazione impossibile, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata separando le variabili. Otteniamo

$$\log\left(\sqrt{y^2+9}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{1}{1+2\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\,dx = \log(\mathrm{e}^x+2) + C\,.$$

Quindi,

$$\sqrt{y^2(x)+9} = k(\mathrm{e}^x+2)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt{K(\mathrm{e}^x+2)^2 - 9}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, si ricava $3\sqrt{8} = \sqrt{9K-9}$, da cui $K = 9$. Pertanto, la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \sqrt{9(\mathrm{e}^x+2)^2 - 9} = 3\sqrt{(\mathrm{e}^x+2)^2 - 1} = 3\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x + 3}\,.$$

Esercizio 4
Poiché la funzione integranda è positiva e continua nell'intervallo $[0, +\infty)$, resta solo da studiare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$. Tenendo conto che, per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \frac{\log(e^{x^4})}{4x^{9/2} + 2x^{5\alpha}} \sim \begin{cases} \dfrac{x^4}{4x^{9/2}} = \dfrac{1}{4x^{1/2}}\,, & \text{se } 5\alpha < 9/2, \text{ ovvero } \alpha < 9/10; \\ \dfrac{x^4}{4x^{9/2} + 2x^{9/2}} = \dfrac{1}{6x^{1/2}}\,, & \text{se } 5\alpha = 9/2, \text{ ovvero } \alpha = 9/10; \\ \dfrac{x^4}{2x^{5\alpha}} = \dfrac{1}{2x^{5\alpha-4}}\,, & \text{se } 5\alpha > 9/2, \text{ ovvero } \alpha > 9/10; \end{cases}$$

si ricava che l'integrale improprio converge se e solo se $\alpha > 9/10$ e $5\alpha - 4 > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 5
Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

a) L'affermazione è vera; infatti, poiché $\{b_n\}$ è limitata (diciamo da un costante M), si ricava che $a_n b_n \leq M a_n$ e, per il criterio della radice, la $\sum a_n$ converge. Quindi, dal criterio del confronto, anche la serie proposta converge.

b) L'affermazione è vera. Infatti, per il criterio della radice, la $\sum a_n$ converge e, quindi, il suo termine generale $a_n \to 0^+$. Questo implica che $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ e, pertanto, poiché il suo termine generale, non essendo infinitesimo, non soddisfa la condizione necessaria, la serie proposta diverge.

c) L'affermazione è falsa; basta considerare le successioni $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, dove $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$ e $b_n \to 0$, quindi è limitata. In tal caso, otteniamo

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(1/2)^n}{(1/4)^n} = 2^n \to +\infty \neq 0\,, \qquad \text{pertanto, la serie proposta non converge.}$$

d) L'affermazione è falsa; basta considerare le successioni $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, dove $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$ e $b_n \to 0$, quindi è limitata. In tal caso, otteniamo

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(1/4)^n}{(1/2)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \text{che è il termine generale di una serie geometrica convergente.}$$