SOLUZIONI COMPITO del 10/01/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy$, otteniamo $i(z^2 + z) = i(x^2 - y^2 + x) - 2xy - y$, da cui si ricava

$$|e^{i(z^2+z)}| = 3 \iff e^{-2xy-y} = 3 \iff -2xy - y = \log 3\,.$$

Pertanto, avremo $y = -\frac{\log 3}{2x+1}$ e $x \neq -1/2$, ovvero $z = x - i\frac{\log 3}{2x+1}$. La rappresentazione delle soluzioni nel piano complesso è un'iperbole con asintoto verticale in $x = -1/2$ e rami nel secondo e quarto quadrante.

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi; inoltre, posto $a_n := \frac{\sinh(n^{\alpha-2/3})}{n^{\alpha^2-2}}$, si osserva subito che, se $\alpha > 2/3$, per la gerarchia degli infiniti, $a_n \not\to 0$, quindi la serie diverge. Invece, per $\alpha < 2/3$, tenendo conto che $n^{\alpha-2/3} \to 0$ e, quindi, $\sinh(n^{\alpha-2/3}) \sim n^{\alpha-2/3}$, si ha

$$a_n \sim \frac{n^{\alpha-2/3}}{n^{\alpha^2-2}} = \frac{1}{n^{\alpha^2-\alpha-4/3}}\,.$$

Pertanto, la serie sarà convergente per $\alpha^2 - \alpha - 4/3 > 1$, ovvero $3\alpha^2 - 3\alpha - 7 > 0$, che fornisce $\alpha > \frac{3+\sqrt{93}}{6}$, da scartare in quanto $> 2/3$, e $\alpha < \frac{3-\sqrt{93}}{6}$. Infine, per $\alpha = 2/3$, si ottiene $a_n \sim (\sinh 1)\, n^{14/9} \not\to 0$ e, quindi, ancora una serie divergente. In conclusione, la serie diverge a $+\infty$ per $\alpha \geq \frac{3-\sqrt{93}}{6}$ e converge per $\alpha < \frac{3-\sqrt{93}}{6}$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = e^{-x}[C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = Ae^{(\alpha-2)x}$, da cui $y_p'(x) = A(\alpha-2)e^{(\alpha-2)x}$ e $y_p''(x) = A(\alpha-2)^2e^{(\alpha-2)x}$. Pertanto, inserendo nell'equazione, si ricava

$$A(\alpha-2)^2e^{(\alpha-2)x} + 2A(\alpha-2)e^{(\alpha-2)x} + 3Ae^{(\alpha-2)x} = 2e^{(\alpha-2)x}$$

$$\implies A(\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 2\alpha - 4 + 3) = 2 \implies A = \frac{2}{\alpha^2 - 2\alpha + 3}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\alpha^2 - 2\alpha + 3 \neq 0$, avendo il discriminante negativo. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = e^{-x}[C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)] + \frac{2}{\alpha^2 - 2\alpha + 3}\, e^{(\alpha-2)x} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Infine, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}[C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)] = 0 \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

affinché la soluzione sia infinitesima per $x \to +\infty$, si deve avere $\alpha - 2 < 0$, ovvero $\alpha < 2$; quindi, al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ e $\alpha < 2$ si hanno infinite soluzioni soddisfacenti alla condizione richiesta.

Esercizio 4

Osserviamo che
$$\frac{3x-2}{x+6} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < -6 \text{ e } x > 2/3\,;$$
pertanto, avremo
$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \arctan\left|\frac{3x-2}{x+6}\right| dx = -\int_0^{2/3} \arctan\left(\frac{3x-2}{x+6}\right) dx + \int_{2/3}^1 \arctan\left(\frac{3x-2}{x+6}\right) dx \\
&= -\, x\arctan\left(\frac{3x-2}{x+6}\right)\Big|_0^{2/3} + x\arctan\left(\frac{3x-2}{x+6}\right)\Big|_{2/3}^1 \\
&\quad + \int_0^{2/3} x\frac{1}{1+\left(\frac{3x-2}{x+6}\right)^2}\frac{3x+18-3x+2}{(x+6)^2}\, dx - \int_{2/3}^1 x\frac{1}{1+\left(\frac{3x-2}{x+6}\right)^2}\frac{3x+18-3x+2}{(x+6)^2}\, dx \\
&= \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \int_0^{2/3} \frac{20x}{x^2+12x+36+9x^2-12x+4}\, dx - \int_{2/3}^1 \frac{20x}{x^2+12x+36+9x^2-12x+4}\, dx \\
&= \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \int_0^{2/3} \frac{2x}{x^2+4}\, dx - \int_{2/3}^1 \frac{2x}{x^2+4}\, dx \\
&= \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \log(x^2+4)\Big|_0^{2/3} - \log(x^2+4)\Big|_{2/3}^1 = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \log\left(\frac{80}{81}\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 5

(A) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n^4}{b_n} = 1 \not\to 0$, quindi la serie diverge.

(B) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n^2\log^2 n}$ e $b_n = \frac{1}{n\log n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n\log n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$; tuttavia la serie diverge.

(C) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n^4}{b_n} = \frac{1}{n^3}$, quindi la serie converge.

(D) L'affermazione è vera, poiché condizione necessaria per la convergenza della serie è che il termine generale sia infinitesimo, ovvero, nel nostro caso, $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, che per definizione equivale a richiedere $\frac{a_n}{b_n} = o(1)$.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy$, otteniamo $-i(z^2 + z) = -i(x^2 - y^2 + x) + 2xy + y$, da cui si ricava

$$|\mathrm{e}^{-i(z^2+z)}| = 2 \iff \mathrm{e}^{2xy+y} = 2 \iff 2xy + y = \log 2\,.$$

Pertanto, avremo $y = \frac{\log 2}{2x+1}$ e $x \neq -1/2$, ovvero $z = x + i\frac{\log 2}{2x+1}$. La rappresentazione delle soluzioni nel piano complesso è un'iperbole con asintoto verticale in $x = -1/2$ e rami nel primo e terzo quadrante.

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi; inoltre, posto $a_n := \frac{\tanh\left(\frac{1}{n^{1-\alpha^2}}\right)}{n^{3-\alpha}}$, si ottiene che, se $\alpha^2 \geq 1$, cioè $\alpha \leq -1$ e $\alpha \geq 1$, poiché $\frac{1}{n^{1-\alpha^2}} \not\to 0$, si ha $a_n \sim \frac{C}{n^{3-\alpha}}$. Quindi, la serie converge per $3 - \alpha > 1$, ovvero $\alpha < 2$, che fornisce $\alpha \leq -1$ e $1 \leq \alpha < 2$, mentre diverge per $\alpha \geq 2$. Invece, per $\alpha^2 < 1$, cioè $-1 < \alpha < 1$, tenendo conto che $\frac{1}{n^{1-\alpha^2}} \to 0$ e, quindi, $\tanh\left(\frac{1}{n^{1-\alpha^2}}\right) \sim \frac{1}{n^{1-\alpha^2}}$, si ha

$$a_n \sim \frac{1}{n^{3-\alpha+1-\alpha^2}} = \frac{1}{n^{-\alpha^2-\alpha+4}}\,.$$

Pertanto, la serie sarà convergente per $-\alpha^2 - \alpha + 4 > 1$, ovvero $\alpha^2 + \alpha - 3 < 0$, che fornisce $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < \alpha < \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ e, quindi, $-1 < \alpha < 1$, visto che $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < -1$ e $1 < \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$. In conclusione, la serie diverge a $+\infty$ per $\alpha \geq 2$ e converge per $\alpha < 2$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 2 \pm i\sqrt{2}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = \mathrm{e}^{2x}[C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = A\mathrm{e}^{(3-\alpha)x}$, da cui $y_p'(x) = A(3-\alpha)\mathrm{e}^{(3-\alpha)x}$ e $y_p''(x) = A(3-\alpha)^2\mathrm{e}^{(3-\alpha)x}$. Pertanto, inserendo nell'equazione, si ricava

$$A(3-\alpha)^2\mathrm{e}^{(3-\alpha)x} - 4A(3-\alpha)\mathrm{e}^{(3-\alpha)x} + 6A\mathrm{e}^{(3-\alpha)x} = 2\mathrm{e}^{(3-\alpha)x}$$

$$\implies A(\alpha^2 - 6\alpha + 9 - 12 + 4\alpha + 6) = 2 \implies A = \frac{2}{\alpha^2 - 2\alpha + 3}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\alpha^2 - 2\alpha + 3 \neq 0$, avendo il discriminante negativo. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = \mathrm{e}^{2x}[C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)] + \frac{2}{\alpha^2 - 2\alpha + 3}\,\mathrm{e}^{(3-\alpha)x} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Infine, poiché

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x}[C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)] = 0 \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

affinché la soluzione sia infinitesima per $x \to -\infty$, si deve avere $3 - \alpha > 0$, ovvero $\alpha < 3$; quindi, al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ e $\alpha < 3$ si hanno infinite soluzioni soddisfacenti alla condizione richiesta.

Esercizio 4

Osserviamo che
$$\frac{2x-1}{x+1}>0 \quad\Longleftrightarrow\quad x<-1 \text{ e } x>1/2\,;$$
pertanto, avremo
$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \log\left(1+\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|\right)dx = \int_0^{1/2}\log\left(1-\frac{2x-1}{x+1}\right)dx+\int_{1/2}^1\log\left(1+\frac{2x-1}{x+1}\right)dx\\
=&x\log\left(\frac{x+1-2x+1}{x+1}\right)\Big|_0^{1/2}+x\log\left(\frac{x+1+2x-1}{x+1}\right)\Big|_{1/2}^1\\
&-\int_0^{1/2}x\frac{x+1}{2-x}\,\frac{-x-1-2+x}{(x+1)^2}\,dx-\int_{1/2}^1 x\frac{x+1}{3x}\,\frac{3x+3-3x}{(x+1)^2}\,dx\\
=&\log\left(\frac{3}{2}\right)-\int_0^{1/2}\frac{3x}{(x-2)(x+1)}\,dx-\int_{1/2}^1\frac{1}{x+1}\,dx\\
=&\log\left(\frac{3}{2}\right)-2\int_0^{1/2}\frac{1}{x-2}\,dx-\int_0^{1/2}\frac{1}{x+1}\,dx-\int_{1/2}^1\frac{1}{x+1}\,dx\\
=&\log\left(\frac{3}{2}\right)-2\log|x-2|\Big|_0^{1/2}-\log(x+1)\Big|_0^1=\log\left(\frac{3}{2}\right)-2\log\left(\frac{3}{2}\right)+2\log 2-\log 2=\log\left(\frac{4}{3}\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 5

(A) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n=n$ e $b_n=\sqrt[4]{n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n}{b_n^4}=1\not\to 0$, quindi la serie diverge.

(B) L'affermazione è vera, infatti per ipotesi $\frac{a_n}{b_n}\sim\frac{b_n^2}{b_n}=b_n\to+\infty$, quindi la serie diverge, poiché non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

(C) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n=n$ e $b_n=n$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n}{b_n^4}=\frac{1}{n^3}$, quindi la serie converge.

(D) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n=n^4$ e $b_n=n$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n}{b_n}=n^3$, quindi la serie diverge; tuttavia $n^4=a_n\not\sim b_n^2=n^2$.

TEMA C

Esercizio 1
Ponendo $z = x + iy$, otteniamo $-i(z^2 - z) = -i(x^2 - y^2 - x) + 2xy - y$, da cui si ricava

$$|e^{-i(z^2-z)}| = 5 \iff e^{2xy-y} = 5 \iff 2xy - y = \log 5\,.$$

Pertanto, avremo $y = \frac{\log 5}{2x-1}$ e $x \neq 1/2$, ovvero $z = x + i\frac{\log 5}{2x-1}$. La rappresentazione delle soluzioni nel piano complesso è un'iperbole con asintoto verticale in $x = 1/2$ e rami nel primo e terzo quadrante.

Esercizio 2
Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi; inoltre, posto $a_n := \frac{n^{2/5-\alpha}}{\tanh\left(\frac{1}{n^{4-\alpha^2}}\right)}$, si ottiene che, se $\alpha^2 \geq 4$, cioè $\alpha \leq -2$ e $\alpha \geq 2$, poiché $\frac{1}{n^{4-\alpha^2}} \not\to 0$, si ha $a_n \sim \frac{C}{n^{\alpha-2/5}}$. Quindi, la serie converge per $\alpha - 2/5 > 1$, ovvero $\alpha > 7/5$, che fornisce $\alpha \geq 2$, mentre diverge per $\alpha \leq -2$. Invece, per $\alpha^2 < 4$, cioè $-2 < \alpha < 2$, tenendo conto che $\frac{1}{n^{4-\alpha^2}} \to 0$ e, quindi, $\tanh\left(\frac{1}{n^{4-\alpha^2}}\right) \sim \frac{1}{n^{4-\alpha^2}}$, si ha

$$a_n \sim \frac{n^{2/5-\alpha}}{n^{\alpha^2-4}} = \frac{1}{n^{\alpha^2+\alpha-22/5}}\,.$$

Pertanto, la serie sarà convergente per $\alpha^2+\alpha-22/5 > 1$, ovvero $5\alpha^2+5\alpha-27 > 0$, che fornisce $\alpha < \frac{-5-\sqrt{565}}{10}$, da scartare in quanto $\frac{-5-\sqrt{565}}{10} < -2$, e $\alpha > \frac{-5+\sqrt{565}}{10}$, cioè $\frac{-5+\sqrt{565}}{10} < \alpha < 2$. In conclusione, la serie diverge a $+\infty$ per $\alpha \leq \frac{-5+\sqrt{565}}{10}$ e converge per $\alpha > \frac{-5+\sqrt{565}}{10}$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 2 \pm 2i$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = e^{2x}[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = Ae^{(\alpha-3)x}$, da cui $y_p'(x) = A(\alpha-3)e^{(\alpha-3)x}$ e $y_p''(x) = A(\alpha-3)^2e^{(\alpha-3)x}$. Pertanto, inserendo nell'equazione, si ricava

$$A(\alpha-3)^2e^{(\alpha-3)x} - 4A(\alpha-3)e^{(\alpha-3)x} + 8Ae^{(\alpha-3)x} = -2e^{(\alpha-3)x}$$

$$\implies A(\alpha^2 - 6\alpha + 9 - 4\alpha + 12 + 8) = -2 \implies A = -\frac{2}{\alpha^2 - 10\alpha + 29}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\alpha^2 - 10\alpha + 29 \neq 0$, avendo il discriminante negativo. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = e^{2x}[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] - \frac{2}{\alpha^2 - 10\alpha + 29}\,e^{(\alpha-3)x} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Infine, poiché

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] = 0 \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

affinché la soluzione sia infinitesima per $x \to -\infty$, si deve avere $\alpha - 3 > 0$, ovvero $\alpha > 3$; quindi, al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 3$ si hanno infinite soluzioni soddisfacenti alla condizione richiesta.

Esercizio 4

Osserviamo che
$$\frac{x+1}{2x-1} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < -1 \text{ e } x > 1/2\,;$$
pertanto, avremo
$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{0} \log\left(1+\left|\frac{x+1}{2x-1}\right|\right)\,dx = \int_{-2}^{-1} \log\left(1+\frac{x+1}{2x-1}\right)\,dx + \int_{-1}^{0} \log\left(1-\frac{x+1}{2x-1}\right)\,dx\\
=&x\log\left(\frac{2x-1+x+1}{2x-1}\right)\Big|_{-2}^{-1} + x\log\left(\frac{2x-1-x-1}{2x-1}\right)\Big|_{-1}^{0}\\
&-\int_{-2}^{-1} x\frac{2x-1}{3x}\,\frac{6x-3-6x}{(2x-1)^2}\,dx - \int_{-1}^{0} x\frac{2x-1}{x-2}\,\frac{2x-1-2x+4}{(2x-1)^2}\,dx\\
=&2\log\left(\frac{6}{5}\right) + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2x-1}\,dx - \int_{-1}^{0} \frac{3x}{(x-2)(2x-1)}\,dx\\
=&\log\left(\frac{36}{25}\right) + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2x-1}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{2x-1}\,dx - \int_{-1}^{0} \frac{2}{x-2}\,dx\\
=&\log\left(\frac{36}{25}\right) + \frac{1}{2}\log|2x-1|\Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{2}\log|2x+1|\,\Big|_{-1}^{0} - 2\log|x-2|\Big|_{-1}^{0}\\
=&\log\left(\frac{36}{25}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{1}{2}\log 3 - 2\log 2 + 2\log 3 = \log\left(\frac{81}{25\sqrt{5}}\right)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 5

(A) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = n^4$ e $b_n = n$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n}{b_n} = n^3$, quindi la serie diverge; tuttavia $n^4 = a_n \not\sim b_n^2 = n^2$.

(B) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = n$ e $b_n = n$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n}{b_n^4} = \frac{1}{n^3}$, quindi la serie converge.

(C) L'affermazione è vera, infatti per ipotesi $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{b_n^2}{b_n} = b_n \to +\infty$, quindi la serie diverge, poiché non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

(D) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = n$ e $b_n = \sqrt[4]{n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n}{b_n^4} = 1 \not\to 0$, quindi la serie diverge.

TEMA D

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy$, otteniamo $i(z^2 - z) = i(x^2 - y^2 - x) - 2xy + y$, da cui si ricava

$$|e^{i(z^2-z)}| = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-2xy+y} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -2xy + y = \log 4\,.$$

Pertanto, avremo $y = -\frac{\log 4}{2x-1}$ e $x \neq 1/2$, ovvero $z = x - i\frac{\log 4}{2x-1}$. La rappresentazione delle soluzioni nel piano complesso è un'iperbole con asintoto verticale in $x = 1/2$ e rami nel secondo e quarto quadrante.

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini non negativi; inoltre, posto $a_n := \frac{\sinh(n^{1-\alpha})}{n^{6-\alpha^2}}$, si osserva subito che, se $\alpha < 1$, per la gerarchia degli infiniti, $a_n \not\to 0$, quindi la serie diverge. Invece, per $\alpha > 1$, tenendo conto che $n^{1-\alpha} \to 0$ e, quindi, $\sinh(n^{1-\alpha}) \sim n^{1-\alpha}$, si ha

$$a_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{n^{6-\alpha^2}} = \frac{1}{n^{-\alpha^2+\alpha+5}}\,.$$

Pertanto, la serie sarà convergente per $-\alpha^2+\alpha+5 > 1$, ovvero $\alpha^2-\alpha-4 < 0$, che fornisce $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < \alpha < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, ossia, tenendo conto che $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < 1$, $1 < \alpha < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. Infine, per $\alpha = 1$, si ottiene $a_n \sim (\sinh 1)/n^5$ e, quindi, ancora una serie convergente. In conclusione, la serie diverge a $+\infty$ per $\alpha < 1$ e $\alpha \geq \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e converge per $1 \leq \alpha < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1 \pm 2i$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = e^{-x}[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = Ae^{(2-\alpha)x}$, da cui $y_p'(x) = A(2-\alpha)e^{(2-\alpha)x}$ e $y_p''(x) = A(2-\alpha)^2e^{(2-\alpha)x}$. Pertanto, inserendo nell'equazione, si ricava

$$A(2-\alpha)^2e^{(2-\alpha)x} + 2A(2-\alpha)e^{(2-\alpha)x} + 5Ae^{(2-\alpha)x} = -2e^{(2-\alpha)x}$$

$$\Longrightarrow \quad A(\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4 - 2\alpha + 5) = -2 \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{2}{\alpha^2 - 6\alpha + 13}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\alpha^2 - 6\alpha + 13 \neq 0$, avendo il discriminante negativo. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = e^{-x}[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] - \frac{2}{\alpha^2 - 6\alpha + 13}\,e^{(2-\alpha)x} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Infine, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] = 0 \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

affinché la soluzione sia infinitesima per $x \to +\infty$, si deve avere $2 - \alpha < 0$, ovvero $\alpha > 2$; quindi, al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 2$ si hanno infinite soluzioni soddisfacenti alla condizione richiesta.

Esercizio 4

Osserviamo che

$$\frac{x+6}{3x-2} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < -6 \text{ e } x > 2/3\,;$$

pertanto, avremo

$$
\begin{aligned}
&\int_{-7}^{0} \arctan\left|\frac{x+6}{3x-2}\right| dx = \int_{-7}^{-6} \arctan\left(\frac{x+6}{3x-2}\right) dx - \int_{-6}^{0} \arctan\left(\frac{x+6}{3x-2}\right) dx \\
=&x \arctan\left(\frac{x+6}{3x-2}\right)\Big|_{-7}^{-6} - x \arctan\left(\frac{x+6}{3x-2}\right)\Big|_{-6}^{0} \\
&- \int_{-7}^{-6} x \frac{1}{1+\left(\frac{x+6}{3x-2}\right)^2} \frac{3x-2-3x-18}{(3x-2)^2} dx + \int_{-6}^{0} x \frac{1}{1+\left(\frac{x+6}{3x-2}\right)^2} \frac{3x-2-3x-18}{(3x-2)^2} dx \\
=&7 \arctan\left(\frac{1}{23}\right) + \int_{-7}^{-6} \frac{20x}{9x^2-12x+4+x^2+12x+36} dx - \int_{-6}^{0} \frac{20x}{9x^2-12x+4+x^2+12x+36} dx \\
=&7 \arctan\left(\frac{1}{23}\right) + \int_{-7}^{-6} \frac{2x}{x^2+4} dx - \int_{-6}^{0} \frac{2x}{x^2+4} dx \\
=&7 \arctan\left(\frac{1}{23}\right) + \log(x^2+4)\Big|_{-7}^{-6} - \log(x^2+4)\Big|_{-6}^{0} = 7 \arctan\left(\frac{1}{23}\right) + \log(40) - \log(53) - \log 4 + \log(40) \\
=&7 \arctan\left(\frac{1}{23}\right) + \log\left(\frac{400}{53}\right).
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

(A) L'affermazione è vera, poiché condizione necessaria per la convergenza della serie è che il termine generale sia infinitesimo, ovvero, nel nostro caso, $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, che per definizione equivale a richiedere $\frac{a_n}{b_n} = o(1)$.

(B) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n^4}{b_n} = \frac{1}{n^3}$, quindi la serie converge.

(C) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n^2 \log^2 n}$ e $b_n = \frac{1}{n \log n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n \log n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$; tuttavia la serie diverge.

(D) L'affermazione è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, che soddisfano le ipotesi e sono tali che $\frac{a_n^4}{b_n} = 1 \not\to 0$, quindi la serie diverge.