SOLUZIONI COMPITO del 10/01/2019
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che

$$1-i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}\,, \qquad 1+\sqrt{3}i=2\mathrm{e}^{i\pi/3}\,.$$

Pertanto,

$$z=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}}{2\mathrm{e}^{i\pi/3}}}=\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-7i\pi/12}}=\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\cdot\begin{cases}\mathrm{e}^{-7i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{17i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{41i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{65i\pi/48}\,.\end{cases}$$

Esercizio 2

La funzione proposta è definita e continua per tutti gli $x\in\mathbb{R}$ in cui il denominatore non si annulla, cioè per $x^2-4\neq 0$, ovvero $C.E.(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x)=\lim_{x\to -2^{\pm}}\frac{-8+\log 6-4}{-4(x+2)}=\pm\infty\,,\implies x=-2 \text{ è asintoto verticale;}\\
&\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x)=\lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{8+\log 6-4}{4(x-2)}=\pm\infty\,,\implies x=2 \text{ è asintoto verticale;}\\
&\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\pm\infty\,,\implies \text{non c'è asintoto orizzontale;}\\
&m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=1\,,\\
&q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+\log(2+x^2)-x^2}{x^2-4}-x\right]\\
&\quad=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+\log(2+x^2)-x^2-x^3+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{x^2}{x^2}=-1\,.
\end{aligned}$$

Quindi, la retta obliqua $y=x-1$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2+8\lambda+16=0$ ed ha per soluzione $\lambda=-4$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x)=C_1\mathrm{e}^{-4x}+C_2x\mathrm{e}^{-4x}$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x)=Ax^2\mathrm{e}^{-4x}$, da cui $y_p'(x)=A\mathrm{e}^{-4x}(2x-4x^2)$ e $y_p''(x)=A\mathrm{e}^{-4x}(2-16x+16x^2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^{-4x}(2-16x+16x^2+16x-32x^2+16x^2)=2\mathrm{e}^{-4x}\,,\quad \text{da cui } A=1.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-4x}+C_2x\mathrm{e}^{-4x}+x^2\mathrm{e}^{-4x}$. Calcoliamo, ora,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)-(2+x^2)\mathrm{e}^{-4x}}{\mathrm{e}^{-4x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(C_1+C_2x+x^2)\mathrm{e}^{-4x}-(2+x^2)\mathrm{e}^{-4x}}{\mathrm{e}^{-4x}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}(C_1-2+C_2x)=6\quad\iff\quad C_1=8, C_2=0\,.
\end{aligned}$$

Quindi, esiste un'unica soluzione dell'equazione proposta soddisfacente la condizione richiesta ed essa è della forma $y(x)=(8+x^2)\mathrm{e}^{-4x}$.

Esercizio 4

Ricordando che

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)\,, \qquad \text{con } t = \sin x;$$
$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\,, \qquad \text{con } t = x;$$

si ricava

$$\begin{aligned}
\log(1+\sin x) &= \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} - \frac{(\sin x)^4}{4} + o((\sin x)^4) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^3}{3} - \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^4}{4} + o(x^4) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, il polinomio cercato sarà $P(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x (\mathrm{e}^t - 1) f'(t)\, dt\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ed è strettamente crescente, si ottiene che $f'(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, dal Teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = (\mathrm{e}^x - 1) f'(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{per } x > 0; \\ = 0 & \text{per } x = 0; \\ \leq 0 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Pertanto, $x = 0$ è punto di minimo assoluto per F e, poiché $F(0) = 0$, si ricava subito che $F \geq 0$ in tutto $\mathbb{R}$.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che

$$-1+i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{3i\pi/4}\,, \qquad \sqrt{3}-i=2\mathrm{e}^{-i\pi/6}\,.$$

Pertanto,

$$z=\sqrt[4]{\frac{2\mathrm{e}^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{3i\pi/4}}}=\sqrt[4]{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-11i\pi/12}}=\sqrt[8]{2}\cdot\begin{cases}\mathrm{e}^{-11i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{13i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{37i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{61i\pi/48}\,.\end{cases}$$

Esercizio 2

La funzione proposta è definita e continua per tutti gli $x\in\mathbb{R}$ in cui il denominatore non si annulla, cioè per $x^4-16\neq 0$, ovvero $C.E.(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-2^\pm}f(x)=\lim_{x\to-2^\pm}\frac{64+\log 5-48}{-32(x+2)}=\mp\infty\,,\implies x=-2 \text{ è asintoto verticale;}\\
&\lim_{x\to 2^\pm}f(x)=\lim_{x\to 2^\pm}\frac{-64+\log 5-48}{32(x-2)}=\mp\infty\,,\implies x=2 \text{ è asintoto verticale;}\\
&\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^5}{x^4}=\mp\infty\,,\implies \text{non c'è asintoto orizzontale;}\\
&m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^5}{x^5}=-2\,,\\
&q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2x^5+\log(3+|x|)-3x^4}{x^4-16}+2x\right]\\
&\quad=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^5+\log(3+|x|)-3x^4+2x^5-32x}{x^4-16}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{3x^4}{x^4}=-3\,.
\end{aligned}$$

Quindi, la retta obliqua $y=-2x-3$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2-6\lambda+9=0$ ed ha per soluzione $\lambda=3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x)=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2x\mathrm{e}^{3x}$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x)=Ax^2\mathrm{e}^{3x}$, da cui $y_p'(x)=A\mathrm{e}^{3x}(2x+3x^2)$ e $y_p''(x)=A\mathrm{e}^{3x}(2+12x+9x^2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^{3x}(2+12x+9x^2-12x-18x^2+9x^2)=6\mathrm{e}^{3x}\,,\quad \text{da cui } A=3.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x)=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2x\mathrm{e}^{3x}+3x^2\mathrm{e}^{3x}$. Calcoliamo, ora,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)-(1+3x^2)\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(C_1+C_2x+3x^2)\mathrm{e}^{3x}-(1+3x^2)\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}(C_1-1+C_2x)=5 \iff C_1=6, C_2=0\,.
\end{aligned}$$

Quindi, esiste un'unica soluzione dell'equazione proposta soddisfacente la condizione richiesta ed essa è della forma $y(x)=(6+3x^2)\mathrm{e}^{3x}$.

Esercizio 4

Ricordando che

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\,, \qquad \text{con } t = 2\log(1+x);$$
$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)\,, \qquad \text{con } t = x;$$

si ricava

$$\begin{aligned}
\sin[2\log(1+x)] &= 2\log(1+x) - \frac{(2\log(1+x))^3}{3!} + o((2\log(1+x))^4) \\
&= 2\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right] - \frac{8}{6}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right]^3 + o(x^4) \\
&= 2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 2x^4 + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, il polinomio cercato sarà $P(x) = 2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_1^x (t^3 - 1) f''(t)\, dt\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ed è strettamente concava, si ottiene che $f''(x) \leq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, dal Teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = (x^3 - 1) f''(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{per } x > 1; \\ = 0 & \text{per } x = 1; \\ \geq 0 & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

Pertanto, $x = 1$ è punto di massimo assoluto per F e, poiché $F(1) = 0$, si ricava subito che $F \leq 0$ in tutto $\mathbb{R}$.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che

$$-1-i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{5i\pi/4}\,,\qquad\qquad \sqrt{3}+i=2\mathrm{e}^{i\pi/6}\,.$$

Pertanto,

$$z=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{5i\pi/4}}{2\mathrm{e}^{i\pi/6}}}=\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{13i\pi/12}}=\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\cdot\begin{cases}\mathrm{e}^{13i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{37i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{61i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{85i\pi/48}\,.\end{cases}$$

Esercizio 2

La funzione proposta è definita e continua per tutti gli $x\in\mathbb{R}$ in cui il denominatore non si annulla, cioè per $x^4-4\neq 0$, ovvero $C.E.(f)=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\sqrt{2}^{\pm}}f(x)=\lim_{x\to-\sqrt{2}^{\pm}}\frac{16\sqrt{2}+\log(2+\sqrt{2})-4}{-8\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}=\mp\infty\,,\implies x=-\sqrt{2}\text{ è asintoto verticale;}\\
&\lim_{x\to\sqrt{2}^{\pm}}f(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}^{\pm}}\frac{-16+\log(2+\sqrt{2})-4}{8\sqrt{2}(x-\sqrt{2})}=\mp\infty\,,\implies x=\sqrt{2}\text{ è asintoto verticale;}\\
&\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^5}{x^4}=\mp\infty\,,\implies\text{ non c'è asintoto orizzontale;}\\
&m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^5}{x^5}=-4\,,\\
&q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-4x^5+\log(2+|x|)-x^4}{x^4-4}+4x\right]\\
&\quad=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^5+\log(2+|x|)-x^4+4x^5-16x}{x^4-4}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{x^4}{x^4}=-1\,.
\end{aligned}$$

Quindi, la retta obliqua $y=-4x-1$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2-8\lambda+16=0$ ed ha per soluzione $\lambda=4$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x)=C_1\mathrm{e}^{4x}+C_2x\mathrm{e}^{4x}$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x)=Ax^2\mathrm{e}^{4x}$, da cui $y_p'(x)=A\mathrm{e}^{4x}(2x+4x^2)$ e $y_p''(x)=A\mathrm{e}^{4x}(2+16x+16x^2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^{4x}(2+16x+16x^2-16x-32x^2+16x^2)=8\mathrm{e}^{4x}\,,\quad\text{da cui }A=4.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x)=C_1\mathrm{e}^{4x}+C_2x\mathrm{e}^{4x}+4x^2\mathrm{e}^{4x}$. Calcoliamo, ora,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)-(3+8x^2)\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(C_1+C_2x+4x^2)\mathrm{e}^{4x}-(3+4x^2)\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{4x}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}(C_1-3+C_2x)=3\quad\iff\quad C_1=6,C_2=0\,.
\end{aligned}$$

Quindi, esiste un'unica soluzione dell'equazione proposta soddisfacente la condizione richiesta ed essa è della forma $y(x)=(6+4x^2)\mathrm{e}^{4x}$.

Esercizio 4

Ricordando che

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\,, \qquad \text{con } t = 2\log(1+x);$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)\,, \qquad \text{con } t = x;$$

si ricava

$$\begin{aligned}
\sinh[2\log(1+x)] &= 2\log(1+x) + \frac{(2\log(1+x))^3}{3!} + o((2\log(1+x))^4) \\
&= 2\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right] + \frac{8}{6}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right]^3 + o(x^4) \\
&= 2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} - 2x^4 + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, il polinomio cercato sarà $P(x) = 2x - x^2 + 2x^3 - \frac{5}{2}x^4$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_1^x (t^3 - 1)f''(t)\,dt\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ed è strettamente concava, si ottiene che $f''(x) \leq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, dal Teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = (x^3 - 1)f''(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{per } x > 1; \\ = 0 & \text{per } x = 1; \\ \geq 0 & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

Pertanto, $x = 1$ è punto di massimo assoluto per F e, poiché $F(1) = 0$, si ricava subito che $F \leq 0$ in tutto $\mathbb{R}$.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che

$$1+i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\,, \qquad 1-\sqrt{3}i=2\mathrm{e}^{-i\pi/3}\,.$$

Pertanto,

$$z=\sqrt[4]{\frac{2\mathrm{e}^{-i\pi/3}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}}}=\sqrt[4]{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-7i\pi/12}}=\sqrt[8]{2}\cdot\begin{cases}\mathrm{e}^{-7i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{17i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{41i\pi/48}\,,\\ \mathrm{e}^{65i\pi/48}\,.\end{cases}$$

Esercizio 2

La funzione proposta è definita e continua per tutti gli $x\in\mathbb{R}$ in cui il denominatore non si annulla, cioè per $x^2-2\neq 0$, ovvero $C.E.(f)=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\sqrt{2}^\pm} f(x)=\lim_{x\to-\sqrt{2}^\pm}\frac{-6\sqrt{2}+\log 3-4}{-2\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}=\pm\infty\,,\implies x=-\sqrt{2}\text{ è asintoto verticale;}\\
&\lim_{x\to\sqrt{2}^\pm} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}^\pm}\frac{6\sqrt{2}+\log 3-4}{2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})}=\pm\infty\,,\implies x=\sqrt{2}\text{ è asintoto verticale;}\\
&\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\pm\infty\,,\implies\text{non c'è asintoto orizzontale;}\\
&m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3}{x^3}=3\,,\\
&q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x^3+\log(1+x^2)-2x^2}{x^2-2}-3x\right]\\
&\quad=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+\log(1+x^2)-2x^2-3x^3+6x}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{2x^2}{x^2}=-2\,.
\end{aligned}$$

Quindi, la retta obliqua $y=3x-2$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2+6\lambda+9=0$ ed ha per soluzione $\lambda=-3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x)=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2x\mathrm{e}^{-3x}$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x)=Ax^2\mathrm{e}^{-3x}$, da cui $y_p'(x)=A\mathrm{e}^{-3x}(2x-3x^2)$ e $y_p''(x)=A\mathrm{e}^{-3x}(2-12x+9x^2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^{-3x}(2-12x+9x^2+12x-18x^2+9x^2)=4\mathrm{e}^{-3x}\,,\quad\text{da cui } A=2.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2x\mathrm{e}^{-3x}+2x^2\mathrm{e}^{-3x}$. Calcoliamo, ora,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)-(4+2x^2)\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(C_1+C_2x+2x^2)\mathrm{e}^{-3x}-(4+2x^2)\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-3x}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}(C_1-4+C_2x)=4\quad\iff\quad C_1=8, C_2=0\,.
\end{aligned}$$

Quindi, esiste un'unica soluzione dell'equazione proposta soddisfacente la condizione richiesta ed essa è della forma $y(x)=(8+2x^2)\mathrm{e}^{-3x}$.

Esercizio 4

Ricordando che

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)\,, \qquad \text{con } t = \sinh x;$$
$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\,, \qquad \text{con } t = x;$$

si ricava

$$\begin{aligned}
\log(1+\sinh x) &= \sin x - \frac{(\sinh x)^2}{2} + \frac{(\sinh x)^3}{3} - \frac{(\sinh x)^4}{4} + o((\sinh x)^4) \\
&= x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - \frac{(x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^2}{2} + \frac{(x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^3}{3} - \frac{(x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^4}{4} + o(x^4) \\
&= x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, il polinomio cercato sarà $P(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{12}x^4$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x (\mathrm{e}^t - 1) f'(t)\, dt\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ed è strettamente crescente, si ottiene che $f'(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, dal Teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = (\mathrm{e}^x - 1) f'(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{per } x > 0; \\ = 0 & \text{per } x = 0; \\ \leq 0 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Pertanto, $x = 0$ è punto di minimo assoluto per F e, poiché $F(0) = 0$, si ricava subito che $F \geq 0$ in tutto $\mathbb{R}$.